Zelluläre Automaten
als einfache selbstorganisierende Systeme

René Schlossus
Sebastian Walther

Dezember 2006

Zusammenfassung

Dieser Artikel gibt einen Überblick über die Theorie der zellulären Automaten, den Beweggründen ihrer Einführung und ihren wichtigsten Vertretern. Im Vordergrund genauerer Betrachtungen stehen dabei die Arbeiten von Stephen Wolfram aus den Jahren 1982 bis 1988, in denen er sich mit der mathematischen Seite von zellulären Automaten beschäftigt hat. Ausgehend davon werden Aufbau, Funktionsweise und grundlegende Eigenschaften von zellulären Automaten beschrieben und in Form von praktischen Anwendungsbeispielen aus Forschung und Technik dargestellt.

Inhaltsverzeichnis

1 Geschichtliches

Im Jahre 1940 stellte Stanislaw Marcin Ulam (∗ 13. April 1909 in Lwów (Lemberg), Polen; † 13. Mai 1984 in Santa Fe, USA), im Rahmen des Manhatten-Projkets in Los Alamos, die zellulären Automaten vor. Sein Ziel bestand darin, ein Denkmodell zu schaffen, mit dem es möglich ist, komplexe Systeme zu beschreiben. Dadurch gelang ihm ein Ansatz zur Programmierung von Analogrechnern, die solche komplexen Systeme simulieren sollten. Ulam lieferte, mit der Idee zu den zellulären Automaten, nur einen theoretischen Einstiegspunkt.
John von Neumann (∗ 28. Dezember 1903 in Budapest Österreich-Ungarn; † 8. Februar 1957 in Washington DC, USA), der ein Freund und Kollege von Ulam war, griff diesen Ansatz auf, und baute ihn zu einem universellen Berechnungsmodell aus. Hieraus entwickelte er anschliessend einen zellulären Automaten, der 29 Zustände aufzeigte und ein gegebenes Muster immer wieder selbst reproduzieren konnte. Es handelte sich dabei um einen reversiblen Typ der zellulären Automaten, der aber zeigte, wie sich ein zellulärer Automat durch Selbstreproduktion entwickelt.
Ende der 1960er kombinierte Aristid Lindenmayer (∗ 17. November 1925 in Budapest; † 30. Oktober 1989) zelluläre Automaten und andere Verfahren, um das Pflanzenwachstum zu modellieren. Das daraus resultierende L-System wird bis heute in den verschiedensten Ausprägungen genutzt.
Konrad Zuse (∗ 22. Juni 1910 in Berlin; † 18. Dezember 1995 in Hünfeld bei Fulda) veröffentlichte 1969 sein Buch *Rechnender Raum*, indem er annahm, dass die Naturgesetze diskreten Regeln folgen und das gesamte Universum das Ergebnis eines gigantischen Zellularautomaten sei. Wikipedia (2006-12-04)
Im Jahre 1970 gelangte der englische Mathematiker John Horton Conway (∗ 26. Dezember 1937 in Liverpool) durch das Spiel *Game of Life* zur Berühmtheit. Das System besteht aus zweidimensional angeordneten zellulären Automaten.
1983 veröffentlichte Stephen Wolfram (∗ 29. August 1959 in London, England, Großbritannien), Erfinder von Mathematica, eine Reihe von grundlegenden Artikeln zu Zellularautomaten, in denen er annahm, dass zelluläre Automaten die Naturwissenschaften revolutionieren könnten.

2 Grundlegendes

2.1 Definition nach John von Neumann

Ein zellulärer Automat ist ein System von Zellen, welche miteinander interagieren. Dabei weist das System ein komplexes Verhalten mit folgenden Merkmalen auf (Artur P. Schmidt, 1998-01-22):

1. Das System besteht aus 1-, 2-, oder 3-dimensionalen Netzwerken aus Zellen.
2. Jede Zelle kann eine von n möglichen diskreten Zuständen annehmen.
3. Das System folgt einer konkreten Zeitdynamik, bei denen die Zellen beim Übergang zu neuen Zuständen die Zustände der jeweiligen Nachbarzellen berücksichtigen.

2.2 Formale Beschreibung

Ein zellulärer Automat kann formal wie folgt beschrieben werden (Wikipedia, 2006-12-04):

- ein Raum R (Zellraum)
- eine endliche Nachbarschaft N
- Zustandsmenge Q
- eine lokale Überführungsfunktion: $\delta : Q^N \rightarrow Q$

Dabei wird er graphisch nicht wie andere Automatentypen durch z.B. einen Graphen dargestellt, sondern durch ein Gitter von Zellen (*Zellraum*), die bestimmte Zustände aus der *Zustandsmenge Q* annehmen können. Dies ist erforderlich, da ein zellulärer Automat ein nicht sequentiell arbeitender Automat ist, d.h. alle Zustandsänderungen eines Taktes werden auf allen Stellen (Zellen) zur gleichen Zeit ausgeführt. Außerdem hängt der neue Zustand einer Zelle nicht nur von ihrem eigenen aktuellen Zustand, sondern auch von den aktuellen Zuständen der Zellen in ihrer *Nachbarschaft N* ab. Im 2-dimensionalen Raum bzw. in einem quadratischen Raster unterscheidet man dabei zwischen der *Von-Neumann-Nachbarschaft* (Abb. 1), bei der lediglich die Flächen, welche eine Kante mit der Basisfläche gemeinsam haben, als Nachbarn gelten. Und der *Moore-Nachbarschaft* (Abb. 2), bei der alle Flächen, welche mindestens eine Ecke mit der Basisfläche gemeinsam haben, als Nachbarn gelten.

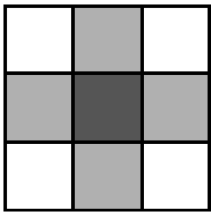

Abbildung 1:
Von-Neumann-Nachbarschaft

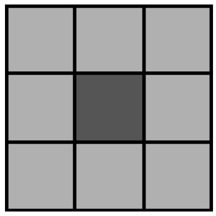

Abbildung 2:
Moore-Nachbarschaft

Durch variierenden Nachbarschaftsbeziehungen lassen sich also die eigentlichen Zustandsübergänge nicht graphisch darstellen, d.h. es wird immer nur der aktuelle Zustand des Automaten dargestellt. Am Anfang wird der zelluläre Automat durch eine *globale Konfiguration* beschrieben, was eine Abbildung aus dem *Zellraum R* in die *Zustandsmenge Q* ist, das bedeutet, man ordnet jeder Zelle des Automaten einen Zustand zu. Danach definiert man eine lokale Überführungsfunktion bzw. eine Zustandsübergangsregel, welche die Zelle von einer *lokalen Konfiguration* in die nächste überführt, wobei dies deterministisch oder stochastisch geschehen kann. Die Anzahl der möglichen Zustände ist in der Regel sehr klein (z.B. '1' und '0'), jedoch reicht dies bereits zur Simulation hochkomplexer Systeme aus.

3 Wolfram

3.1 Modell

Stephen Wolfram beschäftigte sich mit elementaren zellulären Automaten, welche nur aus einer Raum- und einer Zeitdimension bestehen (Abb. 3). Ähnlich einer Uhr, hat die Raumdimension einen Anfang und ein Ende, die aber miteinander verbunden sind. Durch die Zeit- und Raumdimension entsteht ein Gitter bestehend aus Seiten, die entweder leer (0) oder voll (1) sein können. Beim ersten Zeittakt (Urknall), werden die Seiten mit 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit gefüllt. Die Werte jeder Seite des nächsten Zeittaktes ergeben sich aus wohldefinierten Regeln (Naturgesetz). Diese umfassen die Werte eines linken, eines rechten Nachbarn und der Seite selbst. Damit entwickelt sich der Automat zu einer hohen Komplexität. Dabei entstehen kurzlebige, aber geordnete Muster, die entweder wieder erlöschen oder langzeitstabil sind. Die langzeitstabilen Muster können entweder formstabil oder oszillierend sein. Sowohl formstabile, als auch oszillierende Muster treten ortsfest oder beweglich auf. Treffen stabile bewegte Objekte aufeinander, so setzt ein Chaos ein und es kommt zu einer Auslöschung der Muster.

Zelluläre Automaten können auch als Parallelrechner aufgefasst werden, wobei die Anfangskonfiguration das Programm und die Eingabedaten beschreibt, und die zeitliche Entwicklung die Ausgabe erzeugt. Nach Churchs These in der *formalen Theorie der Berechenbarkeit* können solche zellulären Automaten potentiell alle möglichen Systeme simulieren.
(Stephen Wolfram, 1982, Introduction)

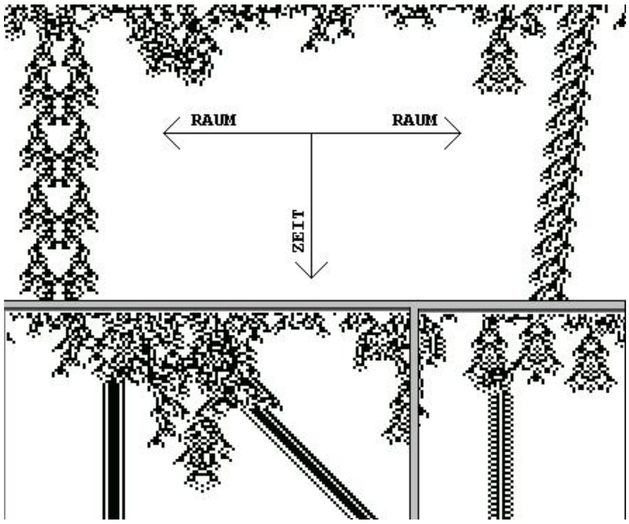

Abbildung 3:
Wolframs 1-dimensionales Universum

3.2 Regeln

Bei einem elementarer zellulärer Automat beschränken sich die möglichen Regeln für einen Zustandsübergang auf ($256 = 2^{(2^3)}$). Da für den Folgezustand ausser dem Zustand der Zelle selbst nur noch die Zustände des jeweils ersten linken und rechten Nachbars ausschlaggebend sind. Diese Regeln können als Boole'sche Operation auf den Werten der 3 benachbarten Zellen interpretiert werden. Die Bezeichnung der Regeln werden als dezimales Äquivalent zu ihrer binären Notation angegeben (z.B. Regel Nr. $90 = 01011010_2$). Abb. 4 zeigt die Menge von Zustandsübergängen für einen elementaren zellulären Automaten am Beispiel der Regel 90. Jeder der acht möglichen Sätze von Werten für eine Seite und ihre nächsten Nachbarn erscheint in der oberen Zeile. In der unteren Zeile sind dagegen die Folgezustände der aktuellen Zelle verzeichnet, welche zusammen die binäre Repräsentation der Regel darstellen.

Von den 256 Regeln sind nur die 32 Regeln der Form $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_2\alpha_5\alpha_4 0$ "legal", d.h. sie erfüllen die Symmetrie und belassen die "untätige" Konfigu-

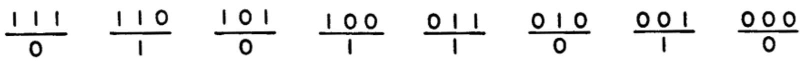

Abbildung 4:
Zustandsübergänge der Regel 90 für einen elementaren zellulären Automaten

ration −000000− unverändert.
(Stephen Wolfram, 1982, Introduction)

3.3 Zustände

Wolfram spezifiziert 4 Klassen von Zielzuständen eines elementaren Zellulären Automaten (hier dargestellt an einem 1-dim Automaten und ausgehend von einer einzigen vollen Zelle, wobei leere Stellen schwarz und volle weiß erscheinen):

Klasse 1 homogener Gleichgewichtszustand (Abb. 5)
(Stephen Wolfram, 1984, 5. Class 1 Cellular Automata)

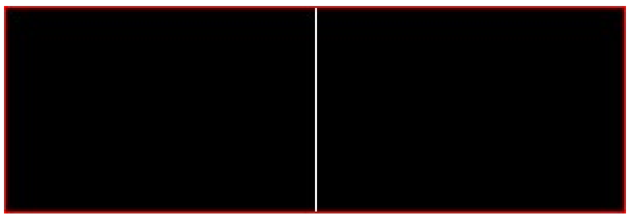

Abbildung 5:
Klasse 1 (Regel 4 = 00000100_2)

Klasse 2 konstanter oder periodischer Endzustand (Abb. 6)
(Stephen Wolfram, 1984, 6. Class 2 Cellular Automata)

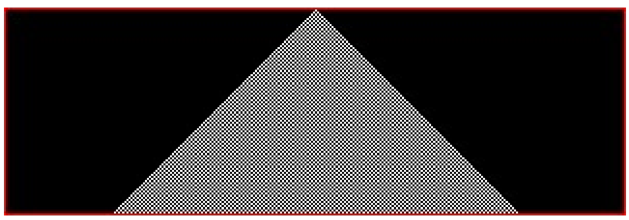

Abbildung 6:
Klasse 2 (Regel 50 = 00110010_2)

Klasse 3 chaotischer Endzustand fraktaler Dimension (Abb. 7)
(Stephen Wolfram, 1984, 7. Class 3 Cellular Automata)

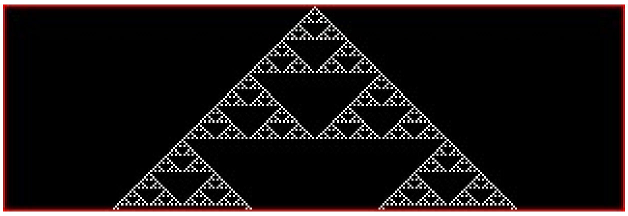

Abbildung 7:
Klasse 3 (Regel 18 = 00010010_2)

Klasse 4 komplexe Muster als Attraktor (Abb. 8)
(Stephen Wolfram, 1984, 8. Class 4 Cellular Automata)

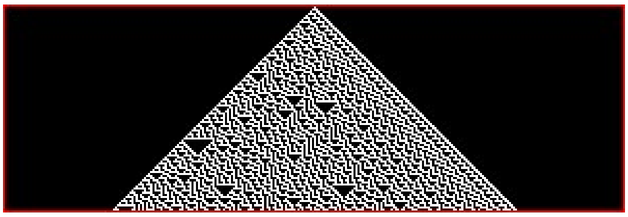

Abbildung 8:
Klasse 4 (Regel 86 = 01010110_2)

3.3.1 Einfache Initialzustände

Bei einfachen Initialzuständen, die auch geordnete Initialzustände heißen, werden im Zeittakt 1 (Gitternetzlinie 1) ausgewählte Zellen explizit auf 1 gesetzt bzw. gefüllt. Im einfachsten Fall ist das nur eine einzige Zelle.
Ein mathematisches Beispiel für einen einfachen Initialzustand mit nur einer gefüllten Zelle und das daraus resultierendes Muster ist das Pascal'sche Dreieck modulo 2. Es gehört zur Klasse 3 mit Endzustand fraktaler Dimension (siehe Abb. 9 untere Darstellungen).
Wie man daran erkennen kann, reicht schon eine volle Zelle und eine Regel aus Klasse 3 aus, um diesen komplexen mathematischen Sachverhalt ganz einfach darzustellen.
(Stephen Wolfram, 1982, Simple Initial States)

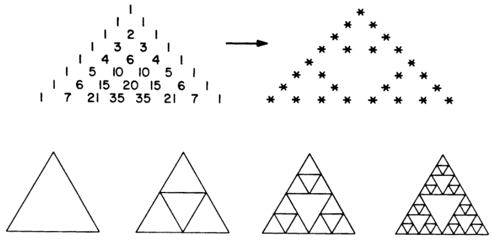

Abbildung 9:
Algebraische und geometrische Darstellung des Pascal'schen Dreiecks

3.3.2 Zufällige Initialzustände

Zufällige Initialzustände sind ungeordnete Initialzustände, bei denen jede Seite unabhängig und zufällig mit der Wahrscheinlichkeit p_0 den Wert 1 zugeordnet bekommt bzw. gefüllt wird, so dass eine anfängliche Dichte $p = p_0$ von 1-Werten bzw. vollen Zellen entsteht.
Wolfram stellte sich auch so die Entstehung des Universums vor. Am Anfang herrscht ersteinmal Chaos, welches im Laufe der Zeit durch Naturgesetze (Regeln) und ein gewisses Miteinander (Nachbarschaft) zur Entwicklung in eine bestimmte Richtung (Muster) führt. Jedoch kann es durch Konflikte zwischen verschiedenen Wegen wiederum zu Chaos kommen, wobei es auch zur kompletten Auslöschung der Entwicklungen führen kann.
(Stephen Wolfram, 1982, Random Initial States)

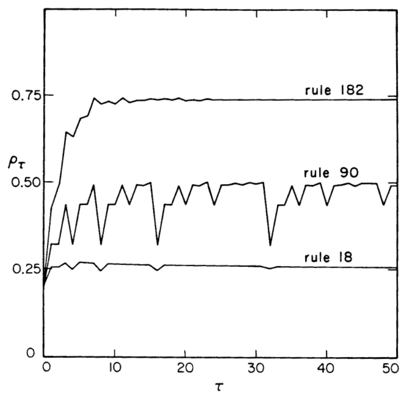

Abbildung 10:
Zeitliche Entwicklung der Dichte von vollen Seiten ausgehend von einem zufälligen Initialzustand der Dichte 0.2

3.4 Praktische Anwendungsbeispiele

Praktische Anwendungsbeispiele für zelluläre Automaten und deren Verwandtschaft sind:

- Mustererzeugung
  - Algorithmische Komposition von Musik

    Grundlage:

    1. Zellulärer Automat nach dem Modell von Wolfram.
    2. Jede Epoche des Automaten entspricht einem Takt der Musik.
    3. Im einfachsten Fall wird jeder Zellposition genau ein Ton zugeordnet. Jedoch klingt dies nicht besonders schön. Durch Verwendung verschiedener Regeln und Anpassungen, z.B. auf MIDI-Töne, kann der Klang verbessert werden. Details zur Anpassung und Umsetzung in Java sind auf der Seite von Paul Reiners (2004-05-18, Cellular automata and music), einem Softwareentwickler bei IBM zu finden.
- Simulation
  - Verkehrssimulation nach Nagel-Schreckenberg-Modell
    (Prof. Dr. Michael Schreckenberg, 2007-01-15)

    Die Straße ist in 7.5m lange Abschnitte (Zellen) unterteilt. Das ist typischerweise der Platz, den ein Fahrzeug im Stau einnimmt. Jede Zelle ist entweder leer oder von einem Fahrzeug mit einer diskreten Geschwindigkeit v von 0 bis *MAXSPEED* (z.B. *MAXSPEED* = 5 Zellen / Zeitschritt) besetzt. Die Anzahl der freien Zellen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Fahrzeugen wird mit *Gap* bezeichnet. Die Abbremswahrscheinlichkeit P ist das stochastische Element (Rauschen) in diesem Modell, bei $P=0$ spricht man vom deterministischen Modell.
    Nun zu den Update-Regeln:

    1. Beschleunigen:
       Wenn das *Gap* größer ist als die eigene aktuelle Geschwindigkeit v, dann erhöhe die Geschwindigkeit um 1, jedoch höchstens auf *MAXSPEED*.
    2. Abbremsen zur Verhinderung von Auffahrunfällen:
       Wenn das *Gap* kleiner ist als die eigene aktuelle Geschwindigkeit v, dann bremse ab.

3. "Trödeln":
   Mit der Wahrscheinlichkeit P wird die Geschwindigkeit v eines Fahrzeuges um 1 verringert.
4. Fahren:
   Jedes Fahrzeug bewegt sich um v Zellen voran.

- Kryptographie
  - Bitstromverschlüsselung

    Vorgehensweise:
    1. Anzahl der Zellen des zu verwendenden 1-dim zellulären Automaten festlegen, entspricht der Schlüssellänge in Bits.
    2. Initialisierung des Automaten, d.h. Belegung der Zellen mit 1 oder 0, entweder zufällig, wobei man sich dann alle Zustände merken muss, oder man macht es nach einem bestimmten Muster. Z.B. könnte man sich ein Passwort ausdenken und dessen binäre Darstellung bis zur Schlüssellänge hintereinanderfügen.
    3. Auswahl einer Regel, die den Initialzustand auf jedenfall verändert (z.B. Regel 86).
    4. Festlegung der Anzahl auszuführender Evolutionsschritte des Automaten.
    5. Konstruktion und Ausführung des Automaten mit genannten Parametern.
    6. Ggf. Aneinanderhängen der Werte der letzten Generation des Automaten bis zur Länge des zu ver-/entschlüsselnden Textes.
    7. XOR-Verknüpfung des (Cipher-)Textes mit dem erzeugten Bitstrom.

4 Fazit

Zelluläre Automaten haben ein breites Anwendungsspektrum, da sie als berechnungs- und konstruktionsuniversell gelten. Sie kommen jedoch nur selten in reiner Form vor, sondern werden mit anderen Verfahren kombiniert bzw. modifiziert.
Stephen Wolfram betrachtet dabei als Vereinfachung nur eindimensionale elementare zelluläre Automaten, welche jedoch bereits eine hohe Komplexität aufweisen können. Insgesamt sind die Arbeiten von Wolfram sehr stark mathematisch orientiert und für eine detailierte Betrachtung bedarf es einen

größeren Rahmen. Jedoch sind seine veröffentlichten Artikel jeweils nur eine Übersicht über die Anwendung von zellulären Automaten in einem bestimmten Kontext. Darum beschränkt sich auch diese Ausarbeitung nur auf einen Überblick über die geschichtliche Entwicklung und die Grundlagen von zellulären Automaten, ohne tiefer z.B.auf komplizierte mathematische Eigenschaften einzugehen. Es ist außerdem zu erwähnen, dass die Arbeiten von Wolfram, zum Zeitpunkt der Anfertigung dieses Schriftstückes, schon über 20 Jahre alt sind, und dass zwar zelluläre Automaten noch Gegenstand der Forschung sind (ACRI, 2006), aber das Gebiet sehr breit gefächert ist. Zudem ist es schwierig, aktuelle Informationen in diesem Zusammenhang zu erhalten.

Literatur

ACRI. Cellular Automata for Research and Industry. *http://acri2006.univ-perp.fr*, 2006.

Artur P. Schmidt. Zelluläre Automaten. *http://www.wissensnavigator.com/download/Schmidt%5FZellul%C3%A4re%20Automaten.pdf*, 1998-01-22.

Paul Reiners. Cellular automata and music. *http://www-128.ibm.com/developerworks/java/library/j-camusic/?ca=dgr-lnxwj01j-camusic*, 2004-05-18.

Prof. Dr. Michael Schreckenberg. Verkehrsfluss-Modellierung. *http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-190/nagel%5Fschreckenberg%5Fmodell%5F1.htm*, 2007-01-15.

Stephen Wolfram. Cellular Automata as Simple Self-Organizing Systems. *http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/82-cellular/index.html*, 1982.

Stephen Wolfram. Universality and Complexity in Cellular Automata. *http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/ca/84-universality/index.html*, 1984.

Wikipedia. Zellulärer Automat. *http://de.wikipedia.org/wiki/Zellul%C3%A4rer%5FAutomat*, 2006-12-04.