

## Chaos - Theorie und Finanzmarktforschung<sup>1</sup>

### 1. Allgemeine Bemerkungen zur Chaos-Theorie

**E**rstmals mit dem Begriff der *Chaos-Theorie* konfrontiert, stellt man sich oftmals vor, dass damit wohl wissenschaftlich erklärt werde, was sowieso schon vom Alltag her bekannt ist: Dass nämlich (beinahe) alles im Leben chaotisch sei oder zumindest zum Chaos hin tendiere. Die Chaos-Theorie packt jedoch das Problem genau von der Gegenseite her an. Unstrukturiert, unscharf, zufällig oder diffus (d.h. eben chaotisch!) scheinende Gegebenheiten werden mit ihrer Hilfe dahingehend untersucht, ob sich nicht doch hinter der *scheinbaren Unordnung* irgendwelche *Gesetzmässigkeiten* finden lassen, welche mit den gängigen und zumeist linearen Theorien nicht oder nicht hinreichend erklärt werden können.

Als erste begannen sich in den sechziger Jahren die *Naturwissenschaftler* mit Chaos-Phänomenen zu befassen. Nachdem beinahe ein halbes Jahrtausend lang das von Newton, Descartes und anderen ausformulierte, mechanistisch-lineare *Kopernikanische Weltbild* als unumstössliche formale Grundlage gegolten hatte, tauchten mit fortschreitender Entwicklung der Forschung Phänomene auf, die sich mit diesen traditionellen Modellen nicht mehr erklären liessen. Berühmt wurde das Beispiel des MIT-Meteorologen Edward Lorenz<sup>2</sup>: Er liess den Computer eine Wettervorhersage zweimal rechnen, wobei beim zweiten Durchlauf die Eingangsdaten von sechs auf drei Dezimalstellen nach dem Komma gerundet wurden. Zu erwarten wäre eigentlich eine lediglich geringfügig modifizierte Vorhersage gewesen, es ergab sich jedoch ein *diametral verschiedenes Resultat*. Die Frage war naheliegend, ob denn hinter dem Wetter nicht Gesetzmässigkeiten, sondern *Chaos und Unordnung* stecken würden<sup>3</sup>.

Es war wohl kein Zufall, dass gerade ein Physiker später entscheidend zur Popularisierung der Grundproblematik "*Mechanistisches vs. Ganzheitliches Weltbild*" beigetragen hat. In seinem Buch "Wendezeit" (englischer Originaltitel "The Turning Point") legte Capra<sup>4</sup> dar, wieso seiner Meinung nach ein *Paradigmawechsel* not tue, wieso ein anderes, und zwar ein nicht-lineares Denken, eine andere "Wahrnehmung" der Welt notwendig sei. Sein Buch wurde zum Klassiker der "New Age"-Bewegung und hat sicher wesentliches dazu beigetragen, dass in den letzten Jahren breite Diskussionen über die darin formulierten Thesen stattgefunden haben und dass beispielsweise Adjektive wie "*vernetzt*", "*gesamtheitlich*", "*integriert*" usw. heute zum Standardvokabular sowohl der Alltagssprache als auch vieler Wissenschaften (insbesondere auch der Betriebswirtschaft) gehören.

Heute existieren Anwendungen der Chaos-Theorie auf den verschiedensten Gebieten. Ob sich die Astronomen mit der Verteilung der Asteroiden im Weltall, die Physiker mit dem Auftauchen und Verschwinden von Sonnenflecken, die Meteorologen mit dem Erscheinen der Eiseiligen, die Mediziner mit dem Auftreten von Herzrhythmusstörungen, die Physiotherapeuten mit Störungen des körperlichen Energiehaushaltes, die Chemiker mit oszillierenden chemischen Reaktionen, die Strassenplaner mit Verkehrszusammenbrüchen, die Finanzwissenschaftler mit der Einführung eines neuen Steuersystemes oder die Ökonometriker mit den Schwankungen von Finanzmarktdaten befassen, überall wird versucht, mit Hilfe dieses noch jungen Wissenschaftsgebietes aussagekräftigere Modelle zur Erklärung vorgegebener Tatbestände zu finden<sup>5</sup>.

Chaostheorie ist im Grunde genommen eine Disziplin der Mathematik. Sie hat u.a. auch zu einem neuen mathematischen Teilgebiet geführt, zur sogenannten *Theorie der fraktalen Geometrie*. Mit ihrer Hilfe kann man bestimmte Ordnungsprinzipien in chaotischen Strukturen eindrücklich aufzeigen. Die verwendeten mathematischen Funktionen sind dabei stets *nichtlinear* und meistens *durch Rückkoppelungen* gekennzeichnet. Im nächsten Kapitel folgt eine Einführung in die mathematischen Grundlagen der Chaos-Theorie, bevor exemplarische Anwendungen in der Finanzmarktforschung diskutiert werden.

## 2. Eine mathematische Einführung in die Chaos-Theorie

An dieser Stelle soll nicht eine Abhandlung verschiedener, von einander abhängigen Differentialgleichungen<sup>6</sup> vorgenommen werden. Mit einer einfachen, nichtlinearen Gleichung<sup>7</sup> kann gezeigt werden, was unter Chaostheorie zu verstehen ist. Viel mehr als Kenntnisse der mathematischen Grundoperationen sind dazu nicht erforderlich. Wird darüber hinaus die reelle Zahlenmenge um die imaginäre Zahl [= i] zur komplexen Zahlenmenge erweitert<sup>8</sup>, kann auch die zur Chaostheorie gehörende Geometrie aufgezeigt werden.

### 2.1. Die Chaos-Arithmetik

Die im folgenden zu betrachtende Gleichung, auch als *logistische Gleichung* bekannt<sup>9</sup>, lautet:

$$x_{n+1} = bx_n - bx_n^2 = bx_n(1 - x_n) \quad (2-1)$$

Gleichung (2-1) zeigt, dass der Wert  $x_{n+1}$  berechnet wird, indem

$$bx(1 - x)$$

n mal auf sich selbst angewendet wird<sup>10</sup>. Dies wird auch als Rückkoppelung bezeichnet. Der Wert  $x_{n+1}$  wird entsprechend *iterativ* ermittelt, weshalb (2-1) auch als *nichtlineare iterative Gleichung* bezeichnet wird. Ein Beispiel soll das Gesagte verdeutlichen<sup>11</sup>.

Wird die Konstante  $b = 2$  und der Anfangswert  $x_0 = 0.3$  gewählt, ergeben sich für  $x_{n+1}$  (wobei  $n = 0, 1, \dots, 9$ ) die folgenden Werte:

$$x_1 = 0.4200 \quad x_2 = 0.4872 \quad x_3 = 0.4997 \quad x_4 = 0.5000 \quad x_5 = 0.5000 \\ x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 0.5000$$

Wird anstelle  $b = 2$  in Gleichung (2-1) der Wert  $b = 2.2$  eingesetzt, ergeben sich für  $x_{n+1}$  (wobei  $n = 0, 1, \dots, 9$ ) die folgenden Werte:

$$x_1 = 0.46200 \quad x_2 = 0.54682 \quad x_3 = 0.54518 \quad x_4 = 0.54551 \quad x_5 = 0.54544 \\ x_6 = 0.54546 \quad x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 0.54545$$

Der Verlauf der in einem Diagramm aufgetragenen  $x$ -Werte zeigt, dass im Fall  $b = 2$  eine zunächst steil ansteigende, dann aber rasch abflachende Kurve entsteht, welche bereits nach der vierten Iteration einen *stationären Zustand* erreicht. Beträgt die Konstante  $b = 2.2$ , zeigt sich nach wenigen Ueber- und Unterschwingungen dasselbe Bild wie im Fall  $b = 2$ . Allerdings steigt die Zahl der bis zum Erreichen eines stationären Zustands nötigen Iterationen auf  $n = 7$ . Es kann gezeigt werden, dass dieses Verhalten auch bei einem weiteren Anstieg von  $b$  nicht ändert. Lediglich die Zahl der nötigen Iterationen, welche das System<sup>12</sup> stationär werden lassen, nimmt zu. Allerdings gilt dies nur bis zu einem Wert von  $b = 2.99\dots$ . Wird die Konstante  $b = 3.0$  gewählt, gerät das System in einen Zustand *regelmässiger Schwingungen* und oszilliert mit *einer Periode* zwischen *zwei  $x$ -Werten*. Wird  $b$  weiter erhöht, zeigt sich, dass ab  $b = 3.4495$  die Kurve doppelperiodisch wird und zwischen *vier  $x$ -Werten* schwankt. Bereits ab  $b = 3.56$  wird die Kurve vierfach periodisch und schwankt zwischen *acht  $x$ -Werten*. Eine erneute Verdoppelung der Perioden auf 16 wird mit einer Steigerung von  $b$  um nur  $9/1000$ , nämlich bei 3.569 erreicht. Findet schliesslich eine Erhöhung von  $b$  auf bspw. 3.7 statt, wird das System *chaotisch*<sup>13</sup>. Die Strukturen wiederholen sich in diesem Fall nicht mehr, und die  $x$ -Werte schwanken regellos<sup>14</sup>.

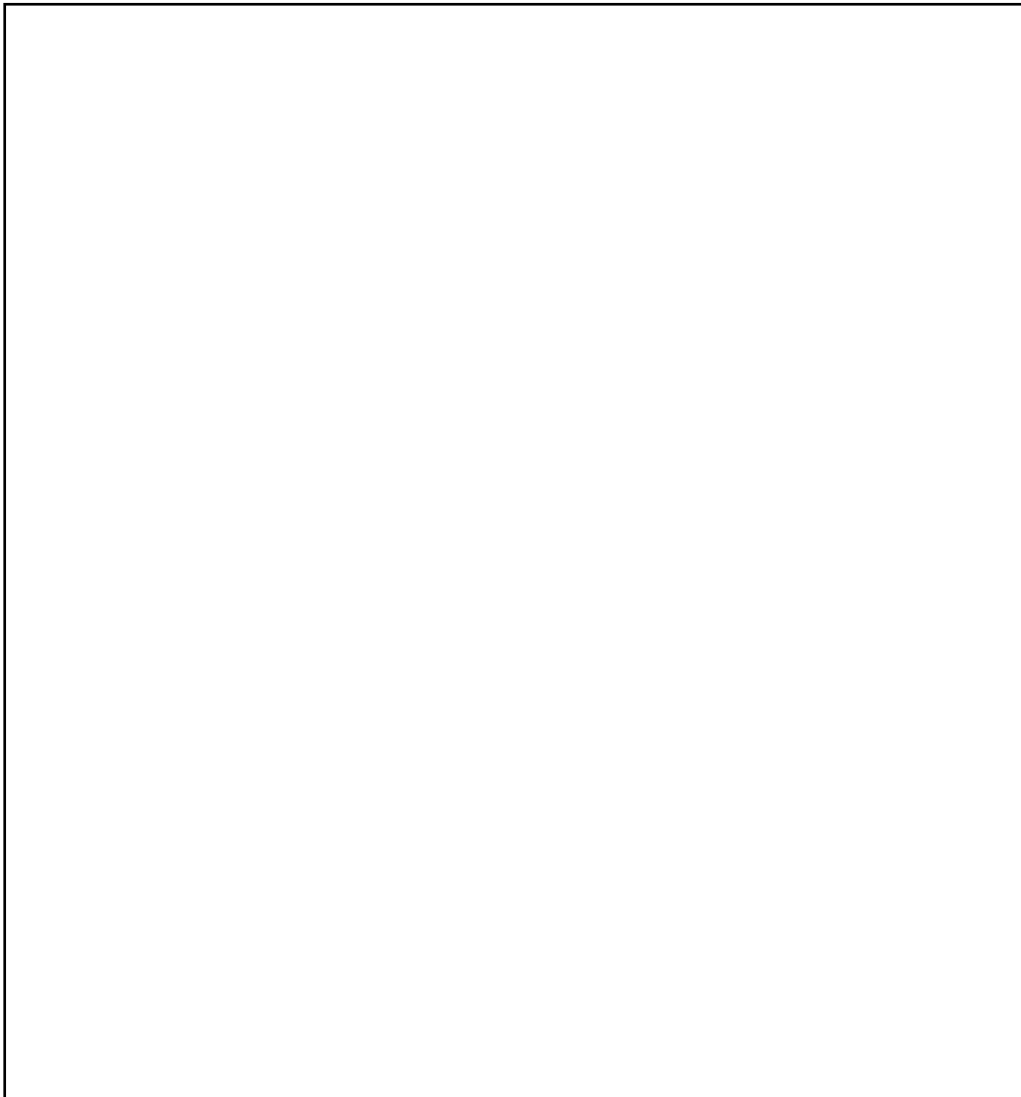
Es bleiben zwei zum Verständnis wichtige Anmerkungen zu beachten. Das beschriebene System kann drei Zustände erreichen: Stationär, übergehend und chaotisch. Im *stationären Zustand* können bestimmte Regeln ausgemacht werden; geringe Veränderungen der Anfangsbedingungen führen lediglich zu kleinen Reaktionen in den Resultaten. Demgegenüber können geringe Veränderungen im *chaotischen Zustand* zu grossen Resultatänderungen führen. Als *Uebergangsstadium* wird der Zustand dazwischen bezeichnet. Während sich im stationären Zustand die Reaktionen auf geringe Änderungen in den Anfangswerten ermitteln lassen, ist dies im chaotischen Zustand nur bedingt möglich: Da die Zielwerte (im vorangegangenen Beispiel die  $x$ -Werte) regellos schwanken, kann das Resultat nur nach dem Durchlauf sämtlicher Iterationsschritte ermittelt werden<sup>15</sup>. Aber das Resultat **kann** ermittelt werden, weshalb auch von *deterministischem Chaos* und nicht nur einfach von Chaos gesprochen werden sollte.

Die zweite Anmerkung betrifft die erwähnte Tatsache, dass in einem chaotischen System geringe Ursachen grosse Wirkungen zeigen. Dies rührt daher, dass bereits bei geringfügig unterschiedlichen Anfangsbedingungen die Resultate auseinanderdriften, wobei der Unterschied exponentiell anwächst<sup>16</sup>:

$$x_n = x_0 \cdot e^{\lambda n} \quad (2-2)$$

(wobei  $x_0$  = Abweichung bei der ersten Iteration,  $e$  = Eulersche Zahl,  $n$  = Iterationszahl,  $x_n$  = Abweichung nach  $n$  Iterationen, wobei  $\lambda$  = Ljapunov-Exponent)<sup>17</sup>.

(2-2) ist eine Exponentialfunktion und zeigt, dass in Abhängigkeit von  $\lambda$ , dem sog. *Ljapunov-Exponenten*, sich der Wert von  $x_n$  mit zunehmender Anzahl Iterationen ändern kann. Der Ljapunov-Exponent  $\lambda$  ist damit ein Mass für das *Auseinander- oder Zusammenlaufen der Lösungen* von iterativen Reihen bei unterschiedlichen Anfangsbedingungen. Während stabile Systeme negative  $\lambda$ s aufweisen, werden solche mit einem  $\lambda = 0$  als marginale Systeme (oszillierende Systeme) bezeichnet. Chaotische Systeme weisen positive  $\lambda$ s auf<sup>18</sup>.



### Abb. 2/1: Bifurkationsdiagramm<sup>19</sup>

In (2-1) wurden bis dahin für  $b$  lediglich ausgewählte Werte eingesetzt. Um sich ein vollständiges Bild von der Aussagekraft des Systems (2-1) machen zu können, wären für  $b$  alle denkbaren Werte einzusetzen, mit den zugehörigen (sich nach eventuellen Einschwingungsvorgängen ergebenden) Werten von  $x$  in ein  $b$ - $x$ -Koordinatensystem einzutragen und die Punkte miteinander zu verbinden. Das Resultat eines derartigen Vorgehens, das sog. *Bifurkationsdiagramm*, ist für Werte zwischen  $b = 2.8$  und  $b = 4$  auf der vorangegangenen Seite in Abb. 2/1 dargestellt.

Das gezeigte Bifurkationsdiagramm verdeutlicht, dass sich nach einer bestimmten Anzahl Iterationen das System (2-1) für Werte  $b < 3$  bei bestimmten  $x$ -Werten einpendelt. Ab einem Wert von  $b = 3$  beginnt  $x$  zwischen zwei Werten zu oszillieren, was durch die Gabelung (Bifurkation) verdeutlicht wird. Mit steigendem  $b$  finden weitere Bifurkationen statt usw.<sup>20</sup> Die  $x$ -Werte beginnen schliesslich chaotisch zu schwanken. Eine mikroskopische Vergrösserung der Abb. 2/1 würde u.a. zeigen, was von blossen Auge nicht zu erkennen ist: Die dunkle Fläche (da wo die  $x$ -Werte chaotisch schwanken) wird immer wieder durch weisse Streifen unterbrochen. An diesen Stellen kommt das Chaos zum Stillstand und es entsteht wieder Ordnung, welche jedoch bei weiterem Anwachsen von  $b$  erneut ins Chaos übergeht. Ein Vergleich des Bifurkationsmodells mit dem Ljapunov-Exponenten bestätigt dabei diesen Sachverhalt (vgl. Abb. 2/2):

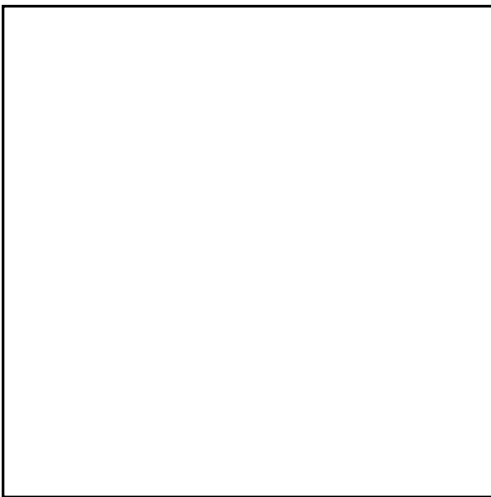


Auch der Ljapunov-Exponent schwankt in Abhängigkeit des Systemzustandes zwischen negativen und positiven Werten hin und her. Unter dem Mikroskop würde man erkennen, dass sich der Uebergang ins erneute Chaos wiederum über die Periodenverdoppelung nachvollzieht<sup>21</sup>, exakt so wie dies zu Beginn geschehen ist.

Abb. 2/2: Ljapunov-Exponent<sup>22</sup>

## 2.2 Fraktale Geometrie - die Geometrie des Chaos

"Fractals give structure to complexity, and beauty to chaos. ... Most natural shapes, and time series are best described by fractals. Nature is, therefore, nonlinear, and fractals are the geometry of chaos"<sup>23</sup>. Nicht treffender könnte das was unter der Geometrie des Chaos verstanden wird umschrieben werden. Was exakt unter einem Fraktal zu verstehen ist, wird im folgenden anhand der *Koch-Schneeflocke* und des *Sierpinski-Dreiecks* gezeigt<sup>24</sup>.



Ausgangspunkt der Entstehung der *Koch-Schneeflocke* (auch als Koch-Insel bezeichnet) ist ein gleichseitiges Dreieck<sup>25</sup>. Jede Seite wird in drei gleiche Teile zerlegt, wobei jeweils das mittlere Drittel durch ein gleichseitiges Dreieck ersetzt und dessen Grundlinie entfernt wird. Das Verfahren wird im zweiten Schritt auf alle verbleibenden Geraden angewendet (vgl. Abb. 2/3). Im dritten Schritt erfolgt die Anwendung des Verfahrens auf die dann verbleibenden Geraden.

Abb. 2/3: Koch-Schneeflocke<sup>26</sup>

Dieses Vorgehen kann beliebig oft wiederholt werden und mit jeder Wiederholung nimmt der Umfang des Gebildes zu. Während der Umfang dank der unendlichen Wiederholbarkeit unendlich lang wird, bleibt die Fläche der Schneeflocke dennoch endlich.

Aus der *euklidischen Geometrie* ist bekannt, dass die Linie eindimensional ist, im Gegensatz zur Fläche (zweidimensional), zum Raum (dreidimensional) oder zum Punkt (nulldimensional). Eine vierte, fünfte oder n-te Dimension ist zwar nicht mehr vorstellbar, doch wird vor allem in den Naturwissenschaften in derartigen Dimensionen gerechnet. Die Kochkurve scheint nun aber weder eine Linie (eindimensional) noch eine Fläche (zweidimensional) zu sein, sondern irgend etwas dazwischen. *Mandelbrot* führte für dieses "Dazwischen" den Begriff *Fraktal* ein<sup>27</sup>. Damit ist die Koch-Schneeflocke ein Fraktal mit einer Dimension zwischen eins und zwei.

Die *fraktale Dimension* ist von der Form des fraktalen Gebildes abhängig und bringt zum Ausdruck, wie ein Gebilde (bzw. eine Zeitreihe) den Raum ausfüllt. Sie ist von allen das System beeinflussenden Faktoren abhängig und lässt sich mit unterschiedlichen Methoden berechnen<sup>28</sup>. Handelt es sich - wie im Fall der Koch-Schneeflocke - um ein Gebilde, kann dessen fraktale Dimension berechnet werden, indem die Eigenschaft der "Verzackung" gemessen wird.

Zur Ermittlung der Länge einer aus verschiedenen geraden Teilstücken zusammengesetzten Linie (bspw. einer Küstenlinie oder etwa der Koch-Schneeflocke) wird ein Messstab mit einer bestimmten Länge  $\Delta$  verwendet. Die Länge der zu messenden Linie ( $L$ ) entspricht dann der Multiplikation aus der Länge des Messstabes ( $\Delta$ ) und der Anzahl benötigter Messstäbe um die zu messende Linie zu umfassen ( $N(\Delta)$ )<sup>29</sup>:

$$L = N(\Delta) \cdot \Delta \quad (2-3a)$$

Da in der euklidischen Geometrie lediglich ganzzahlige Dimensionen (Null, eins, zwei, drei) existieren, ist es unmittelbar einsichtig, dass sich die Länge des Messstabes umgekehrt proportional zur Anzahl benötigter Messstäbe verhält<sup>30</sup>. Algebraisch ausgedrückt gilt daher:

$$N(\Delta) \cdot \Delta = \text{konstant} \quad (2-3b)$$

Für Fraktale stimmt die in (2-3b) gezeigte Proportionalität nicht mehr genau. Die Zahl der zur Umfassung einer fraktalen Kurve benötigten Messstäbe ist nicht proportional zu  $1/\Delta$  sondern proportional zu  $1/\Delta^D$ :

$$N(\Delta) \cdot \Delta^D = \text{konstant} \quad (2-3c)$$

Für die Länge einer *fraktalen Kurve* gilt daher<sup>31</sup>:

$$L(\Delta) / \Delta^{1-D} = \text{konstant.} \quad (2-3d)$$

(wobei  $D$  = fraktale Dimension,  $L(\Delta)$  = Länge der fraktalen Kurve, die von der Länge des verwendeten Messstabes ( $\Delta$ ) abhängig ist).

Wird berücksichtigt, dass  $1/\Delta^{1-D} = \Delta^{D-1}$ , folgt aus (2-3a), (2-3b), (2-3c) und (2-3d):

$$L(\Delta) \cdot \Delta^{D-1} = N(\Delta) \cdot \Delta \cdot \Delta^{D-1} = N(\Delta) \cdot \Delta^D = k \quad (2-3e)$$

(wobei  $k = \text{Konstante}$ )

Um  $D$  zu ermitteln wird (2-3e) logarithmiert

$$\log L(\epsilon) + (D - 1) \cdot \log \epsilon = \log N(\epsilon) + D \cdot \log \epsilon = \log k$$

und nach  $D$  aufgelöst:

$$\begin{aligned} D &= (\log k / \log \epsilon) - (\log L(\epsilon) / \log \epsilon) + 1 \\ &= (\log k / \log \epsilon) - \log N(\epsilon) / \log \epsilon \end{aligned} \quad (2-4)^{32}$$

Die Länge (Umfang) der Koch-Schneeflocke betrage *ursprünglich* 3 (jede Seite des gleichseitigen Dreiecks misst eins); die Konstante beträgt daher  $k = 3$ . Wie bereits weiter oben erwähnt, wird im ersten Konstruktionsschritt jede Seite in drei gleiche Teile zerlegt und das mittlere Drittel jeder Seite durch ein gleichseitiges Dreieck ersetzt, wobei dessen Grundlinie zu entfernen ist. Um den Umfang der Koch-Schneeflocke nach dem ersten Konstruktionsschritt messen zu können, wird ein Messstab mit der Länge  $\epsilon = 1/3$  benötigt.  $N(\epsilon) = 12$  Messstäbe decken die Koch-Schneeflocke ab, deren Länge (= Umfang) nach dem ersten Konstruktionsschritt  $L(\epsilon) = 4$  wird. Entsprechend (2-4) ergibt sich für die (fraktale) Dimension der Koch-Schneeflocke<sup>33</sup>:

$$\begin{aligned} D &= (\log 3 / \log 0.333) - (\log 4 / \log 0.333) + 1 \\ &= (\log 3 / \log 0.333) - (\log 12 / \log 0.333) = \mathbf{1.26186} \end{aligned}$$

Das faszinierende an den Fraktalen ist die *Skaleninvarianz (Selbstähnlichkeit)*: Ein beliebiges Teilstück eines Fraktals sieht dem Fraktal ähnlich; jedes Teilstück eines Teilstücks sieht sowohl dem Teilstück wie dem Fraktal ähnlich usw. Diese Skaleninvarianz lässt sich nicht nur an der Koch-Schneeflocke zeigen. Vor allem wegen seiner Konstruktion soll als weiteres Beispiel das *Sierpinski-Dreieck* dargestellt werden (vgl. Abb. 2/4).

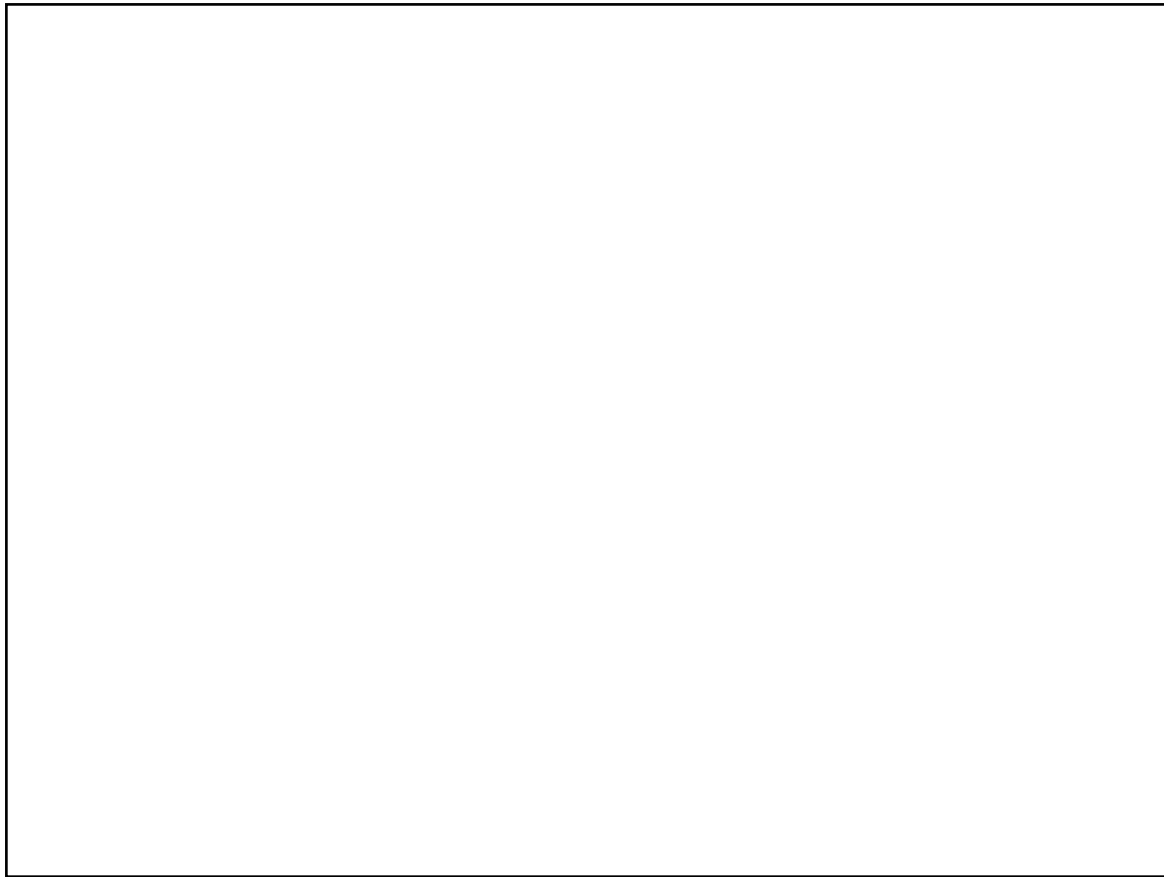


Abb. 2/4: Sierpinski-Dreieck<sup>34</sup>

Die Entstehung desselben ist relativ einfach: Aus einem gleichseitigen Dreieck werde, wie in Abb. 2/4 gezeigt, ein gleichseitiges Dreieck entfernt. Dieser Vorgang wende man auf die verbleibenden drei - ebenfalls gleichseitigen - Dreiecke an. Wird der Vorgang des Entfernen eines Dreiecks aus den verbleibenden Dreiecken beliebig oft wiederholt, gelangt man zum Sierpinski-Dreieck, in welchem auf einer endlichen Fläche eine unendliche Zahl von Dreiecken entfernt wurden. Wiederum lässt sich feststellen, dass die Dimension weder eins (es handelt sich nicht um eine Linie) noch zwei (es handelt sich wegen der herausgenommenen Dreiecke nicht um eine Fläche) beträgt. Vielmehr handelt es sich um eine fraktale Dimension von  $D = 1.58$ .<sup>35</sup>

Die Beispiele der Koch-Schneeflocke und des Sierpinski-Dreiecks zeigen, warum die fraktale Geometrie die Geometrie des Chaos ist. Sowohl in der fraktalen Geometrie wie auch in der Chaos-Arithmetik geht es darum, einen Prozess beliebig oft auf sich selbst anzuwenden. Ebenfalls verbindend ist die Selbstähnlichkeit,

welche in der fraktalen Geometrie wie auch in der Chaos-Arithmetik (vgl. das Bifurkations-Diagramm in Abb. 2/1) charakteristisches Merkmal ist. Dass es sich bei der fraktalen Geometrie aber auch tatsächlich um die Geometrie der Chaos-Arithmetik handelt, ist dann glaubwürdig dargestellt, wenn durch Iteration verschiedenen Zahlenmaterials fraktale Figuren entstehen. Mit dem sog. Chaos-Spiel kann veranschaulicht werden, was auch mit Rechenvorschriften erreicht werden kann.

Um das *Chaos-Spiel* zu spielen, wird ein Würfel benötigt, welcher anstelle der Zahlen eins bis sechs die Zahlen eins, zwei und drei je zweimal zeigt, wobei die eins dort ein zweites mal erscheint wo die vier wäre, die zwei dort wo die fünf wäre und die drei dort wo die sechs wäre. Damit liefert der Würfel eine zufällige Folge der Zahlen eins bis drei. Wie oft bei Würfelspielen wird darüber hinaus ein Spielbrett benötigt. Dieses zeige ein gleichseitiges Dreieck, dessen Ecken mit den Nummern eins, zwei und drei bezeichnet sind. Ausgangspunkt sei ein Punkt innerhalb oder ausserhalb des Dreieckes. Nun beginnt man zu Würfeln. Wird beispielsweise eine drei gewürfelt, gelangt man entsprechend der Konstruktionsvorschrift zum ersten Punkt, welcher auf halber Distanz zwischen dem Ausgangspunkt und der Ecke drei liegt. Zeigt der zweite Wurf bspw. die Zahl eins, liegt der zweite Punkt auf halber Distanz zwischen dem ersten Punkt und der Ecke eins usw. Nach etwa 10'000 Würfeln und dem Eintrag aller Punkte zeigt sich das bereits in Abb. 2/4 dargestellte Sierpinski-Dreieck. Damit kann u.a. gezeigt werden, wie der reine Zufall (das Chaos-Spiel funktioniert natürlich nur mit einem fairen Würfel) zum deterministischen Chaos bzw. zu einem Gebilde mit fraktaler Dimension führt<sup>36</sup>.

Zum Schluss sei der Zusammenhang zwischen Chaosarithmetik und -geometrie nochmals anhand der nachstehenden, einfachen Gleichung dargestellt:

$$x_{n+1} = x_n^2 + c \quad (2-5)$$

(wobei für die Konstante  $c$  eine frei wählbare komplexe Zahl der Form  $a + bi$  einzusetzen ist).

Wird (2-5) iteriert so kann wiederum festgestellt werden, dass verschiedene Verhaltensweisen auftreten: entweder die  $x$ -Werte streben rasch gegen unendlich oder sie bleiben über viele Iterationen innerhalb eines bestimmten Bereiches. Die Grenze dieser Bereiche zeigen in Abhängigkeit der gewählten Konstante  $c$  (vgl. (2-5)) faszinierende fraktale Gebilde. Dabei sind diese wesentlich komplexer als die

Fraktale von Koch oder Sierpinski und werden nach dem französischen Mathematiker Gaston Julia als *Julia-Mengen* bezeichnet. *Es ist also möglich, aus einfachen Algorithmen komplexe Strukturen entstehen zu lassen.* Benoît Mandelbrot war es schliesslich, der vor knapp 15 Jahren (!) die wohl komplexeste auf (2-5) basierende Struktur ermittelte<sup>37</sup>. Auf der Suche nach einer Antwort auf die Frage, wann die  $x$ -Werte gegen unendlich streben und wann nicht, stiess er auf die nach ihm benannte *Mandelbrot-Menge*. Diese umfasst alle komplexen Zahlen  $c$  (vgl. Gleichung (2-5)), für welche die  $x$ -Werte auch nach beliebig vielen Iterationen endlich bleiben<sup>38</sup>.

### 2.3 Chaotische Zeitreihenanalyse

Mit *chaotischen Zeitreihenanalysen* wird zu bestimmen versucht, ob eine Datenreihe, welche auf den ersten Blick als Zufallsreihe erscheint, aufgrund eines chaotischen Prozesses zustande gekommen ist. Handelt es sich um eine chaotische Zeitreihe, ist ein chaotischer Attraktor auszumachen, dessen Dimension fraktal ist<sup>39</sup>. Mit andern Worten ist mit einer chaotischen Zeitreihenanalyse die Dimension des Attraktors der Zeitreihe zu suchen. Zu beachten bleibt, dass je höher diese Dimension ist, desto komplexer ist der die Zeitreihe generierende Prozess.

Eine mögliche Methode, Zeitreihen auf ihr chaotisches Verhalten zu überprüfen, ist die sog. *"Rescaled Range"-Analyse*, welche von Edwin Hurst im Zusammenhang mit den optimalen Kapazitäten von Wasser-Reservoirs eingeführt wurde<sup>40</sup>. Die Anwendung der Rescaled Range-Analyse (R/S-Analyse, Hurst-Analyse) führt über die Berechnung des sog. *Hurst-Exponenten* (Hurst-Koeffizienten) zur Beurteilung, ob eine Zeitreihe einem ausgeprägten Trend oder einem "Biased Random Walk" (auch als fraktale Brownsche Bewegung oder fraktale Zeitreihe bezeichnet) folgt, oder aber die Zeitreihe einen "White Noise"-Prozess darstellt.

Werden bspw. die Renditen einer Aktie über die Zeit betrachtet, kann gemessen werden, wie die Renditeveränderungen um die durchschnittliche Rendite schwanken<sup>41</sup>. Intuitiv ist klar, dass die Spanne der Renditeveränderungen in Abhängigkeit vom Zeithorizont ( $T$ ) zu- oder abnimmt. Ist die betrachtete Zeitreihe zufällig, kann gezeigt werden, dass die Spanne mit  $T^{1/2}$  zunimmt<sup>42</sup>. Um die Spanne der Renditeveränderungen über die Zeit zu standardisieren, dividierte Hurst<sup>43</sup> die Spanne durch deren Standardabweichung (daher der Begriff *"Rescaled Range Analysis"*) und formulierte die folgende Beziehung<sup>44</sup>:

$$R_N / S_N = (N / 2)^H \quad (2-6)$$

( $R_N$  = durchschnittliche Spanne,  $S_N$  = Standardabweichung der Renditeveränderungen,  $N$  = Anzahl betrachteter Renditen bzw. Zeitperioden,  $H$  = Hurst-Exponent)<sup>45</sup>.

$R_N$  entspricht der Differenz zwischen dem Maximum und dem Minimum der kumulierten Abweichungen  $r_{t,N}$  während eines bestimmten Zeithorizontes  $N$ :

$$R_N = [ \max_{i=1}^t (r_i - r_N) ] - [ \min_{i=1}^t (r_i - r_N) ] \quad (2-7)$$

wobei:  $r_i$  = Renditeveränderung während Zeitperiode  $i$   
 $r_N$  = durchschnittliche Renditeveränderung (der  $r_i$ )  
über  $N$  Perioden

$$\sum_{i=1}^t (r_i - r_N) = r_{t,N} = \text{kumulierte Abweichung über } N \text{ Perioden}$$

Um den *Hurst-Exponenten* zu berechnen, ist (2-6) nach  $H$  aufzulösen:

$$H = \log (R_N / S_N) / \log (N / 2) \quad (2-8)$$

Das nachfolgende *Beispiel* soll die Berechnung des Hurst-Exponenten verdeutlichen<sup>46</sup>:

<b>Zeitperiode</b>	<b>Renditeveränderungen der Aktie A</b>		<b>Renditeveränderungen der Aktie B</b>	
1	+	2	+	1
2	-	1	+	2
3	-	2	+	3
4	+	2	+	4
5	-	1	+	5
6	+	2	+	6
Kumulierte Rendite	+	1.93	+	22.83
Standardabweichung		1.70		1.71

Entsprechend (2-7) ergibt sich für die durchschnittliche Spanne der *Aktie A* einen Wert von  $R_N = +11/3$ . Die Standardabweichung beträgt  $S_N = 1.70$ , woraus für das Verhältnis ( $R_N / S_N$ ) ein Wert von 2.157 folgt. Unter Anwendung von (2-8) kann der Hurst-Exponent berechnet werden:  $H = 0.7$ . Für die *Aktie B* lässt sich ein Hurst-Exponent von  $H = 0.881$  ermitteln.

Nimmt der Hurst-Exponent den Wert  $H = 0.5$  an, handelt es sich bei der betrachteten Zeitreihe um einen Zufallsprozess. Gilt  $0 < H < 0.5$ , handelt es sich um eine antipersistente Zeitreihe, das heisst, dass auf eine Aufwärtsbewegung eine Abwärtsbewegung wahrscheinlich ist<sup>47</sup>. Je mehr  $H$  gegen Null geht, desto ausgeprägter ist dieses Verhalten. Liegt der Hurst-Exponent zwischen 0.5 und 1.0 ( $0.5 < H < 1.0$ ) handelt es sich um eine persistente Zeitreihe, das heisst es ist ein Trend auszumachen. Mit zunehmendem  $H$  steigt das persistente Verhalten<sup>48</sup> der Zeitreihe.

Die soeben gemachten Aussagen können durch die Berechnung der Korrelation ( $r_N$ ) noch einmal verdeutlicht werden<sup>49</sup>:

$$r_N = 2^{(2H - 1)} - 1 \quad (2-9)$$

Es muss beachtet werden, dass die entsprechend (2-8) ermittelte Korrelation **nicht** der *Autokorrelation einer Normalverteilung* entspricht.

Wie einleitend erwähnt ist es das Ziel der "Rescaled Range"-Analyse, den Prozess, welcher die Zeitreihe generiert, zu ermitteln. Zu diesem Zweck ist die fraktale Dimension des (chaotischen) Attraktors und damit der Zeitreihe zu ermitteln. Peters zeigt, dass unter bestimmten Voraussetzungen die fraktale Dimension dem reziproken Wert des Hurst-Exponenten entspricht<sup>50</sup>. Für das gezeigte Beispiel ergibt sich demzufolge für die *Aktie A* eine fraktale Dimension von  $D = 1.43$  und für die *Aktie B* eine solche von  $D = 1.14$ .

### 3. Chaos-Theorie und Wirtschaftswissenschaften

Dominierendes Anwendungsgebiet der Chaos-Theorie innerhalb der Wirtschaftswissenschaften ist die *Finanzmarktforschung*. Mit Hilfe von entsprechenden mathematischen Konzepten versucht man, durch die Analyse von Zeitreihen *chaotische Strukturen* in vorgegebenen Finanzmarktdaten (wie Zinssätzen, Aktien- oder Devisenkursen) zu identifizieren<sup>51</sup>. Konkret heisst dies, dass man *nicht-lineare, rückgekoppelte Funktionen* so definiert, dass sie gegebene Zeitreihen bestmöglichst zu erklären vermögen. Eine solche Funktion kann - wie im vorherigen Abschnitt gezeigt - z.B. die Form haben:

$$P_{t+1} = a (P_t)^2 - b(P_{t-1})^3 \quad (3-1)$$

Verbal ausgedrückt besagt diese Gleichung, dass der Preis in der nächsten Periode quadratisch vom momentanen Preis und kubisch vom Preis der Vorperiode abhängt. Die Parameter a und b werden dabei mittels statistischer Methoden (z.B. Regressionsanalyse) geschätzt. Wie in Kapitel 2 gezeigt verhalten sich solche nicht-lineare Gleichungen janusköpfig: Je nach dem Wert der Parameter a und b ergibt sich ein System, in welchem vergangene Preise die zukünftigen Preise in einer vorhersagbaren Art beeinflussen oder aber ein System, welches sich "chaotisch" verhält und keine vernünftigen Prognosen aufgrund von Vergangenheitswerten erlaubt<sup>52</sup>.

Das Ziel solcher Berechnungen ist dasselbe wie bei jeder technischen Analyse: Man will mittels exakterer Zukunftsprognosen renditeträchtigere Anlagemöglichkeiten ausfindig machen. Dahinter verbirgt sich die Idee, dass vergangene Preise die künftigen Preise beeinflussen, womit die Random Walk-Hypothese als ungültig erklärt wird<sup>53</sup>. Die bis heute mit diesen Verfahren gewonnenen Erkenntnisse ermöglichen zwar keine zuverlässigen Langfristprognosen, liefern hingegen vielversprechende Resultate im kürzerfristigen (und damit in dem für das Trading-Geschäft interessanten) Bereich<sup>54</sup>. Im nächsten Kapitel werden Überlegungen und Untersuchungen zu chaotischen Strukturen auf Finanzmärkten näher vorgestellt.

Vorerst soll jedoch noch ein anderes *wirtschaftswissenschaftliches Anwendungsbeispiel* der Chaos-Theorie bzw. der fraktalen Geometrie erwähnt werden: Die *betriebswirtschaftliche Organisationslehre*. In einem interessanten Aufsatz zeigt Seifritz<sup>55</sup> auf, wie sich die Entwicklung der *Organisationsstruktur* von der tay-

loristischen Hierarchie zur Lean Production auch als *Fraktalbildung* interpretieren lässt. Dabei wird davon ausgegangen, dass der moderne Industriebetrieb als "lernfähiger lebender Organismus" aufgefasst werden kann, welcher sich im Marktwettbewerb selbst optimal organisieren muss. Die Organisation geschieht dabei von der Gruppe aus, d.h. von unten nach oben. Ein Fraktal (als selbständige Unternehmenseinheit) wird beispielsweise von einer teilautonomen Arbeitsgruppe repräsentiert, wobei durch Zusammenfassung solcher Gruppen höhere Ordnungszustände (wie Abteilungen, Bereiche, Departemente o.ä.) entstehen. Das wichtigste Prinzip ist dabei die *Selbstähnlichkeit*, d.h. die gebildeten Abteilungen haben dieselbe Struktur wie die ihr zugeordneten Gruppen. Das entstandene Resultat ist gewissermassen eine Fabrik in der Fabrik in der Fabrik etc<sup>56</sup>.

Die nachfolgende Abb. 3/1 zeigt exemplarisch einen möglichen Aufbau, in welchem jede Gruppe aus sechs Mitgliedern besteht und jeweils ein Gruppenmitglied aus einer Gruppe n-ter Ordnung gleichzeitig einer Gruppe (n+1)-ter Ordnung angehört.

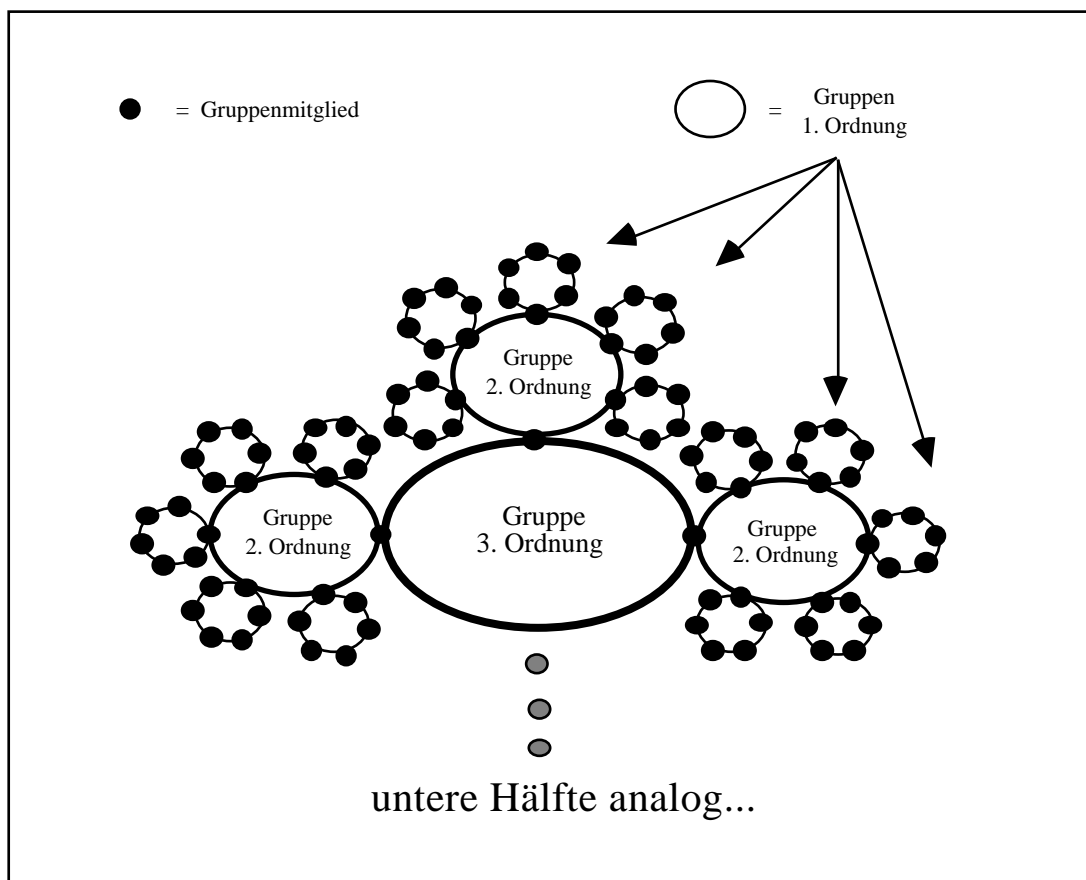


Abb. 3/1: Eine fraktale Gruppenstruktur<sup>57</sup>

## 4. Chaos auf den Finanzmärkten

Bilden bei der Erforschung physikalischer Phänomene wohl primär wissenschaftliche Motive den Hauptantrieb, so spielen bei Untersuchungen von Finanzmarktdaten auch handfeste monetäre Interessen eine massgebliche Rolle. Wer nämlich - sich endlich den uralten Traum so vieler Marktteilnehmer erfüllend - bei der Erklärung und insbesondere der Prognose von Aktienkursen, Zinssätzen oder Devisenkursen besser ist als die Konkurrenz (bzw. allenfalls besser als der Zufall), kann sein Know How direkt "vergolden". Kein Wunder, sind auch immer wieder in der Tagespresse Berichte zu lesen über Forschergruppen, die mit Hilfe der Chaostheorie den "grossen Coup" an den Finanzmärkten landen wollen<sup>58</sup>.

Ökonomisch betrachtet ist die Chaos-Theorie als eine Weiterentwicklung der Technischen Analyse zu betrachten<sup>59</sup>. Waren lange sogenannte "Chartdiagramme" deren wichtigstes Hilfsmittel, so haben in letzter Zeit - insbesondere dank den rasanten Entwicklungen im EDV-Bereich - neuere Ansätze wie die hier beschriebenen stark an Bedeutung gewonnen<sup>60</sup>.

### 4.1. Ansätze zur Aktienkursprognose

Wie im vorangegangenen Abschnitt 2.3. gezeigt, wurden von Hurst verschiedene Naturphänomene dahingehend untersucht, ob sich zwischen verschiedenen Beobachtungen eine Abhängigkeit, ein "Memory" finden lässt. Die von ihm verwendete R/S-Analyse (Rescaled Range-Analyse) wurde später von Peters<sup>61</sup> u.a. auf dem Wertpapiermarkt angewendet. Sein Vorgehen bestand darin, zuerst anhand von Daten zwischen 1950 und 1988 die monatlichen Renditen auf a) dem S&P 500, b) dem 30 Year T-Bond und c) der Differenzgrösse zwischen a) und b) zu berechnen. Danach wurden die Monatsdaten aufgeteilt in verschiedene Beobachtungszeiträume unterschiedlicher Länge. Anhand der daraus resultierenden R/S-Werte wurden regressionsanalytisch die Hurst-Koeffizienten für a), b) und c) geschätzt. Dabei ergaben sich folgende Werte:

a) S&P 500	H = 0.61	(R <sup>2</sup> = 98.8 %)
b) 30 Years T-Bonds	H = 0.64	(R <sup>2</sup> = 97.8 %)
c) Diff. Stock-Bond	H = 0.66	(R <sup>2</sup> = 99.4 %)

Grundsätzlich gilt, dass mit einem höheren H-Wert (= Hurst-Koeffizient) eine stärkere Persistenz und damit ein geringeres "Rauschen"<sup>62</sup> einhergeht. Die oben errechneten Werte weisen auf in den Kursen vorhandene Trends hin, womit ein reiner Random Walk die vorhandenen Datenserien nicht zu erklären vermag. Peters spricht deshalb auch von einem "Biased Random Walk". Er stellte ausserdem fest, dass der Einfluss der vergangenen auf die künftigen Kurse unabhängig von der zugrunde gelegten Beobachtungsdauer war, d.h. eine vergangene 6-Monats-Periode beeinflusste die künftige 6-Monats-Periode, eine vergangene 10-Jahres-Periode beeinflusste die künftige 10-Jahres-Periode usw. Diesen Effekt führte er auf ein sogenanntes "Market Sentiment" zurück.

In einer späteren, umfangreicheren Untersuchung (mit Dow Jones-Daten zwischen 1988-1990) fand Peters erneut einen persistenten Hurst-Prozess im Aktienmarkt, allerdings nur für Zeitperioden von bis zu vier Jahren<sup>63</sup>.

Im weiteren konnte Peters<sup>64</sup> zeigen, dass (auf der Basis von Daten zwischen 1950 und 1989) für die von ihm beobachteten S&P 500-Werte ein der Zeitreihe unterliegender chaotischer Attraktor existieren muss, dessen fraktale Dimension er mit ca. 2.33 (bei einem positiven Ljapunov-Exponenten<sup>65</sup>) errechnete. Allerdings ist damit der entscheidende nächste Schritt noch nicht getan; Peters schliesst denn auch: "... The next step is to develop a model that explains the non-linear mechanism that generates the chaotic attractor. We leave that for further research."<sup>66</sup>

Ohne explizit auf quantitative Erhebungen einzugehen, beschreibt Kiehling<sup>67</sup> überblicksmässig das chaotische Verhalten des Aktienmarktes und insbesondere verschiedene mögliche Rückkoppelungsmechanismen. Er kommt u.a. zum Schluss, dass sich v.a. infolge der dafür nötigen grossen Datenmenge der Ansatz im deutschsprachigen Bereich noch nicht durchgesetzt hat, hingegen die Chaos-Forschung bereits jetzt für *Marktphänomene* wie "Kursstürze" interessante Erklärungsansätze liefert.

## **4.2. Ansätze zur Zinssatzprognose**

Larrain<sup>68</sup> untersuchte, ob sich in Treasury Bill-Daten chaotische Strukturen finden liessen<sup>69</sup>. Als Datengrundlage nahm er die 91-Tage Treasury Bill-Quartalsnotierungen zwischen 1962 und 1989 und definierte eine Funktion, welche sowohl technische als auch fundamentale Faktoren berücksichtigte:

$$r_{t+1} = \{ a + b(r^n)_t - c(r^{n+1})_t \} + [d(y)_t + e(P)_t - f(M)_t - g (Y-C)_t]$$

oder abgekürzt

$$r_{t+1} = \{ \text{K-map} \} + [ \text{Z-map} ]$$

wobei

r	=	Treasury Bill - Zinsen
y	=	reales BSP
P	=	Konsumentenpreisindex
M	=	Nominale Geldmenge M2
Y-C	=	Reales Einkommen minus realer Konsum = Ersparnisse
a,b,...,g	=	zu schätzende Parameter

Der in  $\{ \}$  gesetzte erste Teil der Gleichung (von Larrain als K-map bezeichnet) entspricht der logistischen Funktion und repräsentiert den "chaotischen" Aspekt, wogegen der in  $[ ]$  gesetzte (und als Z-map bezeichnete) zweite Teil volkswirtschaftliche Kenngrößen und damit fundamentale Aspekte darstellt. Die Variable n bezeichnet den Grad der Nichtlinearität, wobei n = 1,2,3 getestet wurden und sich für n = 2 die besten Resultate ergaben.

Mittels verschiedener Regressionsanalysen wurden danach die Parameter der K-map und Z-map bestimmt, wobei sowohl verschiedene Beobachtungszeiträume als auch verschiedene Stichprobengrößen getestet wurden.

Die Resultate lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die Schätzwerte für die Parameter bewegen sich sowohl über die verschiedenen Beobachtungszeiträume als auch in den verschiedenen Stichproben in einem relativ engen Bereich, d.h. sie sind ziemlich konstant (diese hohe Stabilität ist angesichts des beobachteten Zeitraumes 1962-1989 erstaunlich).
- Es liegt eine bemerkenswert hohe statistische Signifikanz vor (Korrelationswerte, t-Statistiken, Durbin-Watson<sup>70</sup>).
- Das Bifurkationsdiagramm zeigt, dass für Werte von  $b < 1.50$  jeweils eine Lösung existiert und danach mit fortschreitender Periodenverdoppelung ab einem Wert von ca.  $b > 1.65$  chaotische Strukturen erreicht werden (bei diesem Wert wird der Ljapunov-Exponent positiv, vgl. dazu auch Abschnitt 2.1.).

- Die nicht-lineare K-map vermag die verwendete Datenreihe gut zu erklären.
- Es finden sich Hinweise darauf, dass auch für die Z-map eine nicht-lineare Relation mehr Erklärungsgehalt haben könnte als die verwendete lineare.
- Larrain folgert, dass zu bestimmten Zeiten die K-map deutlich über die Z-map dominiert, ein andermal jedoch gerade die umgekehrte Situation vorherrscht<sup>71</sup>.

Basierend auf vorangehenden Untersuchungen von Larrain (vgl. vorne) konstruierten später Larrain/Pagano<sup>72</sup> ein Prognosemodell für Treasury Bill-Notierungen. Wiederum wurden zuerst aufgrund von T-Bill Daten zwischen 1962 und 1988 mittels verschiedener Regressionsanalysen die Parameter eines K-map/Z-map - Modelles geschätzt. In einem zweiten Schritt wurde danach die errechnete Schätzgleichung auf (nicht in der Analysestichprobe enthaltene) Werte zwischen 1988 und 1991 angewendet. Die dabei erhaltenen Prognosedaten liegen ziemlich nahe bei den tatsächlichen, und insbesondere wurden die Wendepunkte im Zinsverlauf alle vorhergesehen. Die nachfolgende Abb. 4/1 zeigt den Sachverhalt deutlich auf:

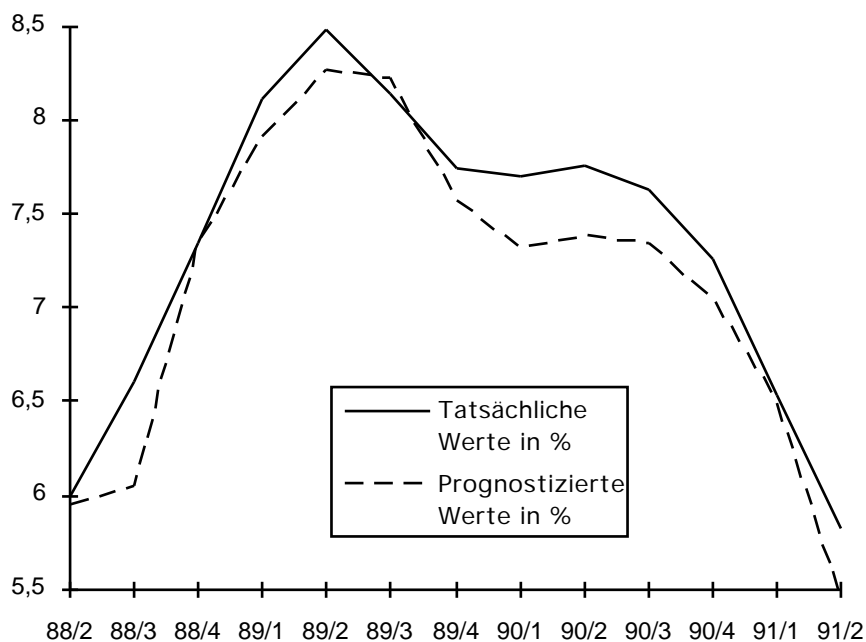


Abb. 4/1: Prognostizierte und tatsächliche Werte<sup>73</sup>

Weitere statistische Untersuchungen bestätigten die Prognosefähigkeit der Schätzgleichung. Daraus zogen Larrain/Pigano den Schluss, dass nicht-lineare Systeme, die zudem auf eine oder mehrere Perioden zurückliegende Daten bezug nehmen (und damit eine "verzögerte Anpassungsreaktion der Märkte" unterstellen), dereinst

mächtige Prognoseinstrumente werden könnten, auch wenn die diesbezügliche Forschung erst am Anfang stecke.

### **4.3. Ansätze zur Devisenkursprognose**

Der Devisenmarkt ist in verschiedener Hinsicht ein ideales Spielfeld für Chaostheoretiker. Erstens ist er hochgradig liquid (täglich werden weltweit Devisen in der Größenordnung von 700 Mrd. US-\$ gehandelt), zweitens liegt breites empirisches Datenmaterial vor (pro Tag fallen Tausende neuer Wechselkursdaten an) und drittens stützen sich Devisenhändler (nachdem Zeitreihenanalysen auf der Basis von makroökonomischen Determinanten ebensowenig wie die Kaufkraftparitätentheorie befriedigende Resultate zu liefern vermochten) seit jeher stark auf die technische Analyse ab. Auf der Chaos-Theorie beruhende Wechselkurs-Prognose-systeme haben dabei nicht zum Ziel, unvorhersehbare Ereignisse (wie z.B. einen Börsencrash, einen politischen Umsturz etc.) vorherzusagen. Vielmehr versucht man, die von solchen "Schocks" ausgelösten Bewegungen hinsichtlich Richtung und Intensität zu prognostizieren. Dabei haben empirische Untersuchungen gezeigt, dass sich nicht nur in den Devisenkursen als solchen bestimmte Strukturen finden lassen, sondern dass insbesondere auch die vergangenen Kursvolatilitäten einen Einfluss auf die künftigen Kursvolatilitäten haben. Konkret bedeutet dies, dass die Volatilitäten als solche zum Untersuchungsgegenstand werden und damit ihrerseits auf chaotische Strukturen hin untersucht werden können. Damit können auch Prognosen über die künftige Volatilität gemacht werden, was insbesondere bei der Preisgestaltung von Devisenoptionen ein wichtiges Hilfsmittel ist<sup>74</sup>.

Peters hat in umfangreichen Untersuchungen verschiedene Wechselkursrelationen mittels der R/S-Analyse untersucht<sup>75</sup>. Für die Relationen von Yen/\$, DM/\$ und £/\$ fand er nahe beieinanderliegende Hurst-Koeffizienten zwischen 0.62 und 0.64, ein klares Indiz für das Vorliegen von stark ausgeprägten Trends. Allerdings liessen sich - im Unterschied etwa zum Aktienmarkt - keine langfristigen Zyklen bestimmen, weshalb Peters folgerte, dass die analysierten Devisenkurse einem "True Hurst Process" folgen würden.

### **4.4. Chaos auf dem Markt für derivative Finanzinstrumente**

In der letzten Zeit ist das Geschäft mit derivativen Finanzinstrumenten zunehmend stark kritisiert worden. In Anbetracht der hohen Verluste, die verschiedene Unternehmen in diesem sensiblen Bereich erlitten haben<sup>76</sup>, ist die Frage naheliegend, ob sich wohl auch die Kursbildung an den Derivativen Finanzmärkten nach bestimmten, nicht-linearen Gesetzmässigkeiten vollzieht. Kiehling beschreibt einige mögliche Ansatzpunkte, welche sich wie folgt zusammenfassen lassen<sup>77</sup>:

- Je höher in den Finanzmärkten die Liquidität ist, desto eher ergibt sich eine stabile Kursentwicklung.
- Derivative Finanzmärkte tragen deshalb normalerweise durch verstärkte Arbitragemöglichkeiten und Erhöhung der Liquidität (sogenannte negative, selbststabilisierende Rückkoppelungen) zur Kursstabilisierung bei.
- In hektischen Zeiten kann sich jedoch genau das Gegenteil ergeben: Nicht mehr langfristig orientierte oder auf Arbitrage ausgerichtete Marktteilnehmer bestimmen das Geschehen, sondern Spekulanten. Dadurch werden positive, selbstverstärkende Rückkoppelungsmechanismen generiert, die die Preisbildungsmechanismen aufschaukeln und die Volatilitäten sprunghaft erhöhen können<sup>78</sup>.
- Verschiedene Forschungsarbeiten weisen darauf hin, dass es bei den Märkten für Derivate (aber auch bei den Märkten für die Underlyings) nicht um lineare, sondern um chaotische Systeme handelt, die nach ruhigeren Phasen plötzlich zu sprunghaftem Handeln tendieren.
- Da die Instabilität der Finanzmärkte vor allem in den letzten Jahren deutlich zugenommen hat, ist es denkbar, dass im Zuge von Internationalisierung, Deregulierung, Securitization etc. nicht nur hemmende Fesseln gesprengt, sondern auch traditionelle Dämpfungen und Bremsen im Finanzsystem entfernt worden sind.

Peters hat einen wichtigen Aspekt der Bewertung von Optionen näher untersucht, nämlich das Eigenverhalten der Volatilität von Aktien<sup>79</sup>. Er nahm S&P Composite-Kurse zwischen 1928 und 1989 errechnete dabei für die realisierten Volatilitäten einen Hurst-Koeffizienten von 0.31, was auf eine eindeutig antipersistente Zeitreihe hinweist (d.h. eine Zeitreihe, bei der nach einem Werteanstieg ein Werterückgang wahrscheinlicher ist als ein erneuter Werteanstieg, und umgekehrt). Allerdings streuen die beobachteten Werte nicht um einen Mittelwert herum (damit liegt kein sogenanntes "Mean-Reverting" vor), sondern die absoluten Änderungen sind zufallsverteilt.

## 5. Zusammenfassende Schlussbemerkungen

Die vorangegangenen Kapitel haben aufgezeigt, dass die noch relativ junge Chaos-Theorie bereits auf den verschiedensten Gebieten angewendet wird. Die bis jetzt gewonnenen Erkenntnisse sind zwar ermutigend, dürfen jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, dass oftmals lediglich erste erfolgversprechende Anzeichen für eine mögliche Relevanz dieses theoretischen Gebäudes vorliegen. Auch sind die Meinungen darüber, ob in den Finanzmärkten überhaupt chaotische Strukturen existieren, nach wie vor geteilt. Alexander/Giblin<sup>80</sup> listen dazu beispielsweise befürwortende wie auch ablehnende und unentschiedene Stellungnahmen auf und finden selber nach kritischer Analyse der Problematik und einer eigenen Untersuchung keine ausreichende empirische Evidenz für chaotische Strukturen.

Auch die umfassenden Arbeiten von Peters wurden teilweise kritisiert. So haben beispielsweise Ambrose/Weinstock Ancel/Griffiths<sup>81</sup> darzulegen versucht, dass eine nicht exakt angewandte R/S-Methodik dazu führen kann, dass irrtümlicherweise ein langfristiger Trend festgestellt wird, welcher aber de facto gar nicht existiert. Selber kommen sie aufgrund anderer statistischer Untersuchungen (basierend auf dem sogenannten Lo-Test) zum Schluss, dass aufgrund der von ihnen verwendeten Werte (S&P 500 - Daten) keine ausreichende Evidenz für eine langfristig-deterministische Aktienkursstruktur vorliegt.

Allgemein lässt sich dazu festhalten, dass mit der Chaos-Theorie die grundsätzliche Diskussion, ob Finanzmarktkurse einem Random Walk folgen oder nicht, neue Nahrung erhalten hat<sup>82</sup>. Darüber aufgrund der vorhandenen Erkenntnisse generell urteilen zu wollen, ist noch zu früh. Wie so oft könnte auch diesmal der Weg in der Mitte liegen, indem sowohl deterministische als auch zufällige, sowohl technische als auch fundamentale Faktoren in unterschiedlicher Zusammensetzung und zu unterschiedlichen Zeitpunkten kursbestimmend sein können. Die künftige Forschung wird sich diesen Fragen noch genauer anzunehmen haben.

## Referenzen:

<sup>1</sup> Die hier behandelte Thematik wurde u.a. auch im Rahmen eines von den Autoren mitgestalteten **Seminars zum Finanz- und Investitionsmanagement** im SS 1994 an der **Universität Zürich** diskutiert.

<sup>2</sup> Vgl. dazu beispielsweise die Schilderung bei **Briggs, J. / Peat F.:** Die Entdeckung des Chaos, München/Wien 1990, S. 96ff.

<sup>3</sup> Aus dem Wettervorhersage-Beispiel abgeleitet sind u.a. die unter den Oberbegriffen "**Schmetterlingseffekt**" bzw. "**Kapitäneffekt**" in verschiedenen Versionen kursierenden Redensarten wie "Das Flattern eines Schmetterlings in Hong Kong vermag in New York ein Gewitter auszulösen" oder "Das Niesen eines Kapitäns im indischen Ozean kann zu einem Schneesturm in Alaska führen".

Allgemein kann gesagt werden, dass chaotische Systeme äusserst empfindlich auf externe Störungen reagieren und sich noch so kleine anfängliche "Fehler" im Laufe der Zeit exponentiell vergrössern können.

<sup>4</sup> **Capra, F.:** Wendezeit - Bausteine für ein neues Weltbild, Bern/München/Wien 1982.

<sup>5</sup> Die erwähnten Anwendungen sind entnommen aus **Morfill, G./Scheingraber, H.:** Chaos ist überall ... und es funktioniert, Frankfurt 1993; **Nürnberger, C.:** Faszination des Chaos, Stuttgart 1993; **Briggs, J. / Peat F.:** Die Entdeckung des Chaos, München/Wien 1990; **Patak, H.:** Chaostheorie: Das Endspiel des Laplaceschen Dämons, in: **Energetische Physiotherapie**, Nr. 33, April 1993, S. 13-21.

<sup>6</sup> Zur Differentialgleichung vgl. bspw. **Kall, P.:** Lineare Algebra für Ökonomen, Stuttgart 1984, S. 71 oder **Pfuff, F.:** Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Bd. 1, 2. Aufl., Braunschweig 1991, S. 125ff.

<sup>7</sup> Eine nichtlineare Gleichung reagiert - im Gegensatz zu einer linearen Gleichung - *nicht* proportional auf die Aenderung einer Variablen.

Der Grad der nicht-linearen Gleichung hat dabei nur untergeordnete Auswirkungen auf das chaotische Verhalten. Vgl. dazu **Larrain, M.:** Testing Chaos and Non-Linearities in T-Bill Rates, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 47, No. 5, Sept.-Oct. 1991, p. 54.

<sup>8</sup> Die reale Zahlenmenge umfasst rationale (ganze und gebrochene, positive und negative) und irrationale (solche, welche hinter dem Komma eine unendlich lange, nichtperiodische Zahlenfolge aufweisen, bspw.  $2^{1/2}$ ,  $e$ , ...) Zahlen.

Die Zahl  $i = -1^{1/2}$  wird dabei als "imaginäre Zahl" definiert. Komplexe Zahlen haben allgemein die Form  $[a + bi]$  und dienen u.a. zur Berechnung von Wurzeln aus negativen Zahlen (bspw.  $-16^{1/2} = 4i$ ). Vgl. bspw. **Ohse, D.:** Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I, 3. Aufl., München 1993, S. 39ff.

<sup>9</sup> Vgl. bspw. **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 9 und p. 121ff. Die logistische Gleichung ist ein eindimensionales, nichtlineares und rückgekoppeltes System. Im Gegensatz zu einem kontinuierlichen System, das mit partiellen *Differentialgleichungen* beschrieben werden kann, handelt es sich hierbei um ein diskretes System, das mit einer *Differenzgleichung* darstellbar ist.

Mit der gezeigten logistischen Gleichung lässt sich u.a. auch das allgemein bekannte "Jäger-Beute"-Problem darstellen.

<sup>10</sup> Neben der logistischen Gleichung gibt es weitere Systeme, welche chaotische Eigenschaften aufweisen. Nürnberger nennt als Beispiele :

$$x_{n+1} = x_n + a \cdot \sin \cdot x_n \quad \text{oder} \quad x_{n+1} = ax_n^2 - 1$$

Vgl. **Nürnberger, C.:** Faszination des Chaos, Stuttgart 1993, S. 74.

<sup>11</sup> Die Logistische Gleichung wurde in der Literatur breit diskutiert. Vgl. dazu bspw. **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 121ff; **Nürnberger, C.:** Faszination des Chaos, Stuttgart 1993, S. 40ff; **Morfill, G./Scheingraber, H.:** Chaos ist überall ... und es funktioniert, Frankfurt 1993, S. 116ff; **Briggs, J. / Peat F.D.:** Die Entdeckung des Chaos, München/Wien 1990, S. 78ff; **Peters, E.:** A Chaotic Attractor for the S&P 500, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 47, No. 2, March-April 1991, p. 56; **Larrain, M.:** Testing Chaos and Non-Linearities in T-Bill Rates, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 47, No. 5, Sept.-Oct. 1991, p. 54.

Das Beispiel wurde aus **Nürnberger** (S. 46ff) entnommen. Dasselbe Beispiel mit demselben Zahlenmaterial findet sich auch bei **Briggs/Peat** (S. 80ff).

<sup>12</sup> Im Falle nur einer Gleichung von einem *System* zu sprechen scheint vielleicht etwas vermessen zu sein, doch kann man sich für analoge Sachverhalte auch weit kompliziertere Gleichungen oder Gleichungssysteme als die Gleichung (2-1) vorstellen.

<sup>13</sup> Der kritische Wert, für den das System (2-1) chaotisch wird, beträgt  $b = 3.5699456$ .

<sup>14</sup> Im Beispiel wurde für  $x_0$  bewusst ein Wert zwischen Null und eins gewählt. Die Gleichung (2-1) zeigt nur für den Fall  $0 < x_0 < 1$  das beschriebene Verhalten. Demgegenüber kann die Konstante  $b$  auch andere als die gezeigten Werte annehmen.

<sup>15</sup> Vgl. **Nürnberger, C.:** Faszination des Chaos, Stuttgart 1993, S. 64.

<sup>16</sup> Vgl. **Morfill, G./Scheingraber, H.:** Chaos ist überall ... und es funktioniert, Frankfurt 1993, S. 120.

<sup>17</sup> (2-2) gilt nur für diskrete Systeme, nicht aber für stetige Systeme.

<sup>18</sup> Es ist zu beachten, dass in einem System mit mehreren Freiheitsgraden (d.h. mit mehreren frei wählbaren und von anderen Grössen unabhängigen Parametern) für jeden Freiheitsgrad ein Ljapunov-Exponent existiert. Ist die Bewegung eines Systems im Phasenraum (Raum, indem die Erscheinung bestimmter (Mess-)Daten dargestellt wird) beschränkt, ist die Summe aller  $\lambda$ s immer kleiner oder höchstens gleich Null. Besitzt ein System einen Attraktor, ist die Summe aller  $\lambda$ s immer kleiner als Null.

Exkurs:

Als *Attraktor* wird dabei ein Anziehungspunkt bezeichnet, oder exakter "... die geometrische Struktur im Zustandsraum, die aus allen Zuständen besteht, die ein dynamisches System auf lange Sicht annehmen kann. Auf lange Sicht heisst: nachdem das System eventuelle Einschwingvorgänge durchlaufen hat ..." (**Morfill, G./Scheingraber, H.:** Chaos ist überall ... und es funktioniert, Frankfurt 1993, S. 267). Im Beispiel des Systems (2-1) existieren demzufolge für Werte  $b < 3$  ein Attraktor, für Werte zwischen  $b = 3$  und  $b < 3.4495$  zwei Attraktoren, für Werte zwischen  $b = 3.4495$  und  $b < 3.56$  vier Attraktoren usw.

Kann in einem System eine infinite Anzahl möglicher Werte innerhalb eines begrenzten Zustandsraumes erreicht werden, besitzt das System einen *chaotischen Attraktor* - auch als *seltener Attraktor* bezeichnet. Chaotische Attraktoren sind demnach nicht-periodisch und weisen eine fraktale Dimension auf (vgl. **Peters, E.:** A Chaotic Attractor for the S&P 500, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 47, No. 2, March-April 1991, p. 56 aber auch **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 136ff). In Abschnitt 2.2. wird auf die Koch-Schneeflocke und das Sierpinski-Dreieck eingegangen; auch da wird man wieder auf den Sachverhalt stossen, dass eine infinite Anzahl von Lösungen in einem endlichen Raum existiert.

<sup>19</sup> Abb. 2/1 wurde entnommen aus **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 8.

<sup>20</sup> Der Zustand des Chaos kann über verschiedene Wege erreicht werden. Führt der Weg - wie im Beispiel gezeigt - über die Periodenverdoppelung in den chaotischen Zustand, wird auch von einem *Feigenbaum-Szenario* gesprochen. Abb. 2/1 zeigt, dass sich die Abstände zwischen den Periodenverdoppelungen verkürzen, was aufgrund der Aenderung von  $b$  erfolgt ( $b$  wird daher auch als *Kontrollparameter* bezeichnet). Das Verhältnis der Differenz der Werte des Kontrollparameters zwischen zwei aufeinanderfolgenden Periodenverdoppelungen ist dabei konstant und wird nach dessen Entdecker als Feigenbaumzahl bezeichnet (vgl. **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 126 oder auch **Morfill, G./Scheingraber, H.:** Chaos ist überall ... und es funktioniert, Frankfurt 1993, S. 277):

$$\text{Feigenbaumzahl} = F = (b_n - b_{n-1}) / (b_{n+1} - b_n) ; \text{ wobei } n \text{ gross ist}$$

Die Feigenbaumzahl gilt als Naturkonstante; ihr numerischer Wert beträgt  $F = 4.669201 \dots$ .

Der Abstand zwischen den Periodenverdoppelungen verringert sich demzufolge jeweils auf  $(1 / 4.669201)$  des vorhergehenden Abstandes.

<sup>21</sup> Eine ausgezeichnete Darstellung und Beschreibung findet sich dazu in **Nürnberger, C.:** Faszination des Chaos, Stuttgart 1993, S. 70ff.

<sup>22</sup> Abb. 2/2 wurde entnommen aus **Larrain, M.:** Testing Chaos and Non-Linearities in T-Bill Rates, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 47, No. 5, Sept.-Oct. 1991, p. 57.

<sup>23</sup> **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 45.

<sup>24</sup> Als Beispiel hätte auch der ebenfalls in der Literatur immer wieder gezeigte *Menger-Schwamm* gewählt werden können.

<sup>25</sup> Vgl. dazu etwa **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 49 oder **Briggs, J. / Peat F.D.:** Die Entdeckung des Chaos, München/Wien 1990, S. 134.

<sup>26</sup> Abb. 2/3 ist entnommen aus **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 50.

<sup>27</sup> Vgl. **Briggs, J. / Peat F.D.:** Die Entdeckung des Chaos, München/Wien 1990, S. 134.

<sup>28</sup> Vgl. dazu auch Abschnitt 2.3. An dieser Stelle soll lediglich die verhältnismässig einfache Berechnung der fraktalen Dimension der Koch-Schneeflocke und des Sierpinski-Dreiecks gezeigt werden.

<sup>29</sup> Vgl. dazu auch **Embrechts, M.:** Basic Concepts of Nonlinear Dynamics and Chaos Theory, in: **Deboeck, G.:** Trading on the Edge, New York 1994, p. 266ff.

<sup>30</sup> Im Gegensatz zur euklidischen Geometrie wird für die Darstellung von Fraktalen eine Geometrie benötigt, welche auch nicht-ganzzahlige Dimensionen berücksichtigt. Letztere werden auch als "*Fraktale Dimensionen*" bezeichnet. Vgl. **Frison, T.:** Nonlinear Data Analysis Techniques, in: **Deboeck, G.:** Trading on the Edge, New York 1994, p. 282ff.

<sup>31</sup> Es ist zu beachten, dass (2-3a) für fraktale wie auch nichtfraktale Gebilde gilt.

<sup>32</sup> Mit (2-4) können je nach Inputdaten die Dimension  $D$ , die Konstante  $k$ , die Länge eines fraktalen Gebildes  $L(\epsilon)$ , die Länge des Messstabes  $\epsilon$  oder die Anzahl benötigter Messstäbe  $N(\epsilon)$  bestimmt werden.

Wird (2-4) nach  $\log L(\epsilon)$  aufgelöst, ergibt sich

$$\log L(\epsilon) = \log k + (1-D) \cdot \log \epsilon$$

Mit andern Worten gilt: wird die Länge einer fraktalen Kurve gegenüber der Länge des Messstabes in einem doppeltlogarithmierten Diagramm aufgetragen, ergibt sich eine Gerade mit einer Steigung von  $(1 - D)$ ; *im Beispiel der*

*Koch-Schneeflocke* ergibt sich für die Steigung der Gerade zwischen den beiden Punkten ( $\log 4 / \log 0.333$ ) und ( $\log 5.333 / \log 0.111$ ) eine Steigung von  $-0.261686 = (1 - D)$ .

Wird der Umfang eines *Kreises* gegenüber der Länge des Messstabes in einem doppeltlogarithmierten Diagramm aufgetragen, ergibt sich eine horizontale Gerade ( $(1 - D) = 0$  oder  $D = 1$ ). Beträgt bspw. der Umfang eines Kreises  $U = 4$  und wird die Länge des Messstabes konstant mit  $r$  angenommen, ergibt sich für die Anzahl benötigter Messstäbe  $N(r) = U / r = \text{Durchmesser}$ . Die Dimension wird entsprechend (2-4) berechnet (wobei wiederum  $k = U$ ). Da  $D = 1$  ist, handelt es sich beim Kreis nicht um ein Fraktal; der Kreisumfang ist eine glatte Linie. Diesen Sachverhalt nutzte Peters, um die Ermittlung der fraktalen Dimension mit Kreisen zu erklären: Die fraktale Kurve ist mit Kreisen abzudecken wobei der folgende Zusammenhang gelte (vgl. **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 58):

$$N \cdot (2 \cdot r)^D = 1 \text{ und daraus folgend } D = \log N / \log (1/2r)$$

(wobei  $N$  = Anzahl benötigter Kreise,  $r$  = Kreisradius).

<sup>33</sup> Nach dem zweiten Konstruktionsschritt (welcher analog dem Ersten durchgeführt wird), ist  $k = 3$ ,  $r = 1/9$ ,  $N(r) = 48$ ,  $L(r) = 16/3$ . Entsprechend (2-4) ergibt sich für die Dimension wiederum  $D = 1.26186$ .

<sup>34</sup> Abb. 2/4 ist entnommen aus: **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 48.

<sup>35</sup> Die Ermittlung der fraktalen Dimension des Sierpinski-Dreiecks erfolgt unter Anwendung von Gleichung (2-4). Die ursprüngliche Länge des Dreiecks beträgt 3 (jede Seite des gleichseitigen Dreiecks misst eins); die Konstante beträgt daher  $k = 3$ . Entsprechend der Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks beträgt die Länge des Messstabes  $r = 0.5$ ; nach dem ersten Konstruktionsschritt werden  $N(r) = 9$  Messstäbe benötigt.

<sup>36</sup> Zum Chaos-Spiel vgl. auch **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 51ff oder **Nürnberg, C.:** Faszination des Chaos, Stuttgart 1993, S. 132ff.

<sup>37</sup> Vgl. **Briggs, J. / Peat F.D.:** Die Entdeckung des Chaos, München/Wien 1990, S. 141.

<sup>38</sup> Warum Peters (vgl. **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 45) Fraktale als die Schönheit des Chaos bezeichnet zeigt sich bei der genauen Betrachtung der Mandelbrot-Menge (vgl. dazu **Peitgen, H./Richter, P.:** "The Beauty of Fractals", Berlin 1986).

<sup>39</sup> Vgl. dazu die Ausführungen in Fussnote 18.

<sup>40</sup> **Hurst, H./Black, R./Simaika, Y.:** Long-Term Storage: An Experimental Study, London 1965, zit. nach **Embrechts, M.:** Basic Concepts of Nonlinear Dynamics and Chaos Theory, in: **Deboeck, G.:** Trading on the Edge, New York 1994, p. 275.

<sup>41</sup> Die Ermittlung des Hurst-Exponenten wird im Hinblick auf Kap. 4 mittels Aktienrenditen gezeigt. Ebenso gut hätten auch andere Zeitreihen verwendet werden können.

<sup>42</sup> Vgl. **Pindyck, R./Rubinfeld, D.:** Econometric Models & Economic Forecasts, 3. Aufl., New York 1991, p. 442.

<sup>43</sup> **Hurst, H./Black, R./Simaika, Y.:** Long-Term Storage: An Experimental Study, London 1965, zit. nach **Embrechts, M.:** Basic Concepts of Nonlinear Dynamics and Chaos Theory, in: **Deboeck, G.:** Trading on the Edge, New York 1994, p. 275.

<sup>44</sup> Vgl. **Peters, E.:** Fractal Market Analysis, New York 1994, p 56. Dort wird allerdings eine allgemeinere Form von (2-6) gezeigt, welche hier nicht weiter interessiert.

<sup>45</sup> Mandelbrot fand, dass der Hurst-Exponent entsprechend (2-6) im Falle  $0.5 < H < 0.7$  überschätzt und im Falle  $0.7 < H < 1.0$  unterschätzt wird. Bessere Werte ergeben sich für  $H$  wenn

$$R_N / S_N = N^H$$

angewendet wird. Vgl. dazu **Peters, E.:** Fractal Structure in the Capital Markets, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 45, No. 4, July-Aug. 1989, p. 34.

<sup>46</sup> Eigene Berechnungen, basierend auf Daten von Peters (vgl. **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 62).

<sup>47</sup> Das antipersistente Verhalten wird auch als "*Pink Noise*" bezeichnet (vgl. **Peters, E.:** Fractal Market Analysis, New York 1994, p 171).

<sup>48</sup> Das persistente Verhalten wird auch als "*Black Noise*" bezeichnet (vgl. **Peters, E.:** Fractal Market Analysis, New York 1994, p 171).

<sup>49</sup> Vgl. **Peters, E.:** Fractal Structure in the Capital Markets, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 45, No. 4, July-Aug. 1989, p. 34.

<sup>50</sup> Vgl. **Peters, E.:** Fractal Market Analysis, New York 1994, p 197ff.

<sup>51</sup> Vgl. dazu auch Abschnitt 2.3.

<sup>52</sup> Man beachte dazu nochmals das in Abschnitt 2.1. skizzierte Verhalten der logistischen Gleichung.

<sup>53</sup> Die Random Walk-Hypothese besagt, dass historische Preise keinerlei Einfluss auf künftige Preise haben und dass das Verhältnis zwischen diesen beiden einer zufälligen Verteilung folgt. Vgl. dazu z.B. **Auckenthaler, C.:** Theorie und Praxis des Portfolio Management, Bern/Stuttgart/Wien 1994, S. 276ff.

<sup>54</sup> Das auch in der Praxis bereits erfolgreich solche oder ähnliche Systeme eingesetzt werden, zeigt beispielsweise ein Interview mit R. Olsen (Olsen & Associates), vgl. **Strebel, B.:** Risk-Management auf wackeligen Beinen, in: **Schweizer Bank**, Nr. 9/1994, S. 18-19.

<sup>55</sup> Vgl. zu den nachfolgenden Ausführungen **Seifritz, W.:** Die fraktale Fabrik, in: **NZZ**, 21./22. Mai 1994, S. 41.

<sup>56</sup> Dieses Beispiel der "fraktalen Fabrik" basiert u.a. auf den Eigenschaften des in Abschnitt 2.2. beschriebenen

*Sierpinski-Dreiecks.*

<sup>57</sup> Quelle: **Seifritz, W.:** Die fraktale Fabrik, in: **NZZ**, 21./22. Mai 1994, S. 41.

<sup>58</sup> Vgl. beispielsweise **Bachmann, P.:** Chaos-Business, in: **Tages-Anzeiger und Berner Zeitung (Hrsg.):** Das Magazin, Nr. 15, 16. April 1994, S. 31-40.

<sup>59</sup> Die technische Analyse geht von den beobachteten Kursen als solche aus und zieht aus deren bisherigem Verlauf Rückschlüsse auf zukünftige Bewegungen. Das Ziel ist dabei, Trendverläufe und Trendumkehrpunkte frühzeitig zu erkennen; auf Quantifizierungen mittels Änderungsraten o.ä. wird weitgehend verzichtet. Vgl. dazu **Perridon, L. / Steiner, M.:** Finanzwirtschaft der Unternehmung, 7. Aufl., München 1993, S. 205ff.

Dazu ist anzumerken, dass es schon bisher am Rande der technischen Analyse Strömungen gegeben hat, die graphisch nach nicht-linearen, aber sich regelmässig wiederholenden Strukturen in Finanzmarktdaten gesucht haben. Exemplarisch seien etwa die Elliott-Wellen erwähnt. Nähere Ausführungen dazu finden sich z.B. bei **Thiessen, F.:** Technische Analyse mit dem Elliott-Wave-Prinzip, in: **Die Bank**, Nr. 11/1989, S. 609-612.

<sup>60</sup> Neben der Chaos-Theorie zählen dazu insbesondere auch die sogenannten Neuronalen Netze. Vgl. dazu beispielsweise **Klimasauskas, C.:** Neural Network Techniques, in: **Deboeck, G.:** Trading on the Edge, New York 1994, p. 3-26.

<sup>61</sup> Vgl. **Peters, E.:** Fractal Structure in the Capital Markets, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 45, No. 4, July-Aug. 1989, p. 32-37.

<sup>62</sup> Als "Rauschen" bezeichnet man die Unschärfe vorhandener Daten bzw. deren nicht-genaue Anpassung an ein vorgegebenes Modell. "Weisses Rauschen" ist die Bezeichnung für das Audio-Äquivalent der Brownschen Molekularbewegung, d.h. für voneinander völlig unabhängige Töne.

<sup>63</sup> Vgl. **Peters, E.:** Fractal Market Analysis, New York 1994, p.112ff.

<sup>64</sup> Vgl. **Peters, E.:** A Chaotic Attractor for the S&P 500, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 47, No. 2, March-April 1991, p. 55-62.

<sup>65</sup> Vgl. dazu Abschnitt 2.1.

<sup>66</sup> **Peters, E.:** A Chaotic Attractor for the S&P 500, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 47, No. 2, March-April 1991, p. 61.

<sup>67</sup> **Kiehling, H.:** Das Chaos auf dem Aktienmarkt, in: **Die Bank**, Nr. 3/1992, S. 146-150.

<sup>68</sup> Vgl. **Larrain, M.:** Testing Chaos and Non-Linearities in T-Bill Rates, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 47, No. 5, Sept.-Oct. 1991, p. 51-62.

<sup>69</sup> Treasury Bills sind Schuldverpflichtungen der US-Regierung mit einer Laufzeit von bis zu einem Jahr. Es werden regelmässig Treasury Bills mit drei, sechs und zwölf Monaten Laufzeit ausgegeben, wobei die Ausgabe mit einem Abschlag erfolgt, so dass der Ertrag für den Investor aus der Differenz Rückzahlungspreis minus Ausgabepreis besteht.

<sup>70</sup> Nähere Informationen zu diesen statistischen Grössen finden sich z.B. bei **Watson, C./ Billingsley, P./Croft, D./Huntsberger, D.:** Statistics for Management and Economics, 5th ed., Boston 1993, p. 395 bzw. p. 787ff.

<sup>71</sup> Damit ergibt sich eine neue Sichtweise bezüglich der alten Kontroverse zwischen Fundamentalanalyse und Technischer Analyse.

<sup>72</sup> Vgl. **Larrain, M./Pagano, M.:** Forecasts from a Nonlinear T-Bill Rate Model, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 49, No. 6, Nov.-Dec. 1993, p. 83-88.

Ebenfalls beschrieben wird dieses Modell bei **Peters, E.:** Chaos and Order in the Capital Markets, New York 1991, p. 187ff.

<sup>73</sup> Daten entnommen aus **Larrain, M./Pagano, M.:** Forecasts from a Nonlinear T-Bill Rate Model, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 49, No. 6, Nov.-Dec. 1993, p. 84.

<sup>74</sup> Weitere diesbezügliche Überlegungen finden sich bei: **o.V.:** Neue Ansätze zur Wechselkursprognose, in: **NZZ**, 22. Nov. 1991, S. 39.

<sup>75</sup> Vgl. **Peters, E.:** Fractal Market Analysis, New York 1994, p.159ff.

<sup>76</sup> Vgl. dazu beispielsweise die Zusammenstellung über die grössten Verluste im Derivatebereich bei **Shirref, D.:** Fill that gap!, in: **Euromoney**, August 1994, p. 29.

<sup>77</sup> Vgl. dazu **Kiehling, H.:** Nichtlineare chaotische System-Charakteristika, in: **Schweizer Bank**, Nr. 8/94, S. 49-50.

<sup>78</sup> Kiehling illustriert dies am Beispiel des Börsencrash vom Oktober 1987:

Hohe Umsätze am Kassamarkt verunmöglichten eine real-time Berechnung der Aktienindices. Weil dadurch keine fairen Indexfutures-Preise berechnet werden konnten, wurden sicherheitshalber nicht marktgerechte Preise gestellt, womit der Handel zum Erliegen kam. Dadurch konnten sich die Marktteilnehmer nicht mehr absichern und waren teilweise gezwungen, auf den Kassamärkten selbst zu verkaufen. Damit ist die positive Rückkoppelung gegeben, das Spiel beginnt wieder von vorne...

<sup>79</sup> Vgl. dazu **Peters, E.:** Fractal Market Analysis, New York 1994, p 143ff.

<sup>80</sup> **Alexander, C. / Giblin, I.:** Chaos in the system?, in: **RISK**, No. 6, Vol. 7 (June 1994), p. 71-76.

<sup>81</sup> **Ambrose, B.W. / Weinstock Ancel, E. / Griffiths, M.D.:** Fractal Structure in the Capital Markets Revisited, in: **Financial Analysts Journal**, Vol. 49, No. 3, May/June 1993, pp. 73-77.

<sup>82</sup> Heute gängige Kapitalmarktmodelle unterstellen i.d.R. einen Random Walk. Damit müssten beim Vorliegen chaotischer Strukturen in den Finanzmarktdaten die Modelle entsprechend modifiziert werden.